SYMÉTRIE CENTRALE - EXERCICES AVEC DÉMONSTRATION

I) Le triangle ABC est tel que : $AB = 5$cm, $AC = 4$cm et $\widehat{BAC} = 40^\circ$. On appelle G le milieu de $[AC]$ et D le symétrique du point B par rapport à G.
1) Quelle est la mesure de l'angle $\widehat{ACD}$?
2) Déterminer la longueur CD.

II) Soit $(\mathscr{C})$ un cercle de centre I sur lequel on trace deux diamètres distincts $[AB]$ et $[EF]$.
Démontrer que les droites (AE) et (BF) sont parallèles.

III) Soit ABC un triangle, D un point de la droite (AC) et I le milieu du segment $[BD]$. On appelle E et F les symétriques respectifs des points A et C par rapport au point I.
1) Prouver que les droites (FA) et (CE) sont parallèles.
2) Prouver que les longueurs FA et CE sont égales.
3) Prouver que les mesures des angles $\widehat{IAD}$ et $\widehat{IEB}$ sont égales.
4) Prouver que les points E, B et F sont alignés.

IV) Soit deux droites perpendiculaires (d_1) et (d_2). Soit I un point n'appartenant à aucune de ces deux droites, on appelle (d_3) la droite symétrique de (d_1) par rapport à I.
Démontrer que (d_3) est perpendiculaire à (d_2).

V) Soit un segment $[AB]$ de médiatrice (d). On choisit sur (d) un point I, puis sur (IA) un point C. On appelle alors D le symétrique de C par rapport à (d).
1) Montrer que I, B et D sont alignés.
2) Montrer que : $AC = BD$.
3) Montrer que (CD) est parallèle à (AB).

VI) Deux cercles $(\mathscr{C}_1)$ et $(\mathscr{C}_2)$ ont le même centre I mais des rayons différents.
Le segment $[AB]$ est un diamètre du cercle $(\mathscr{C}_1)$ et le segment $[CD]$ est un diamètre du cercle $(\mathscr{C}_2)$.
1) Démontrer que les droites (AC) et (BD) sont parallèles.
2) Démontrer que les longueurs AD et BC sont égales.
3) Démontrer que les angles $\widehat{ACB}$ et $\widehat{ADB}$ ont la même mesure.

VII) Soit ABD un triangle rectangle en A, I le milieu de $[BD]$ et C le symétrique de A par rapport à I.
1) Montrer que l'angle $\widehat{DCB}$ est droit.
2) Montrer que les droites (AB) et (CD) sont parallèles.
3) Montrer que l'angle $\widehat{ADC}$ est droit.

VIII) Soit un segment $[AB]$ et (d) sa médiatrice. On appelle I le point d'intersection de $[AB]$ avec (d).
Déterminer le symétrique de A par rapport à I.

IX) Soit un quadrilatère $ABCD$. On appelle E et F les points tels que A soit le milieu de $[BE]$ et aussi celui de $[DF]$. Puis, on défini G et H, les symétriques respectivement de B et D par rapport à C.
Montrer que : $EF = GH$.

X) Soit un triangle ABC tel que $AB = AC = 4$cm et $BC = 6$cm. On construit alors F le symétrique de C par rapport à B, E le symétrique de A par rapport à B et G le symétrique de F par rapport à E.
1) Montrer que : $EF = 4$cm.
2) Montrer que : $EG = 4$cm.
3) Montrer que (EG) est parallèle à (AC).

XI) Le triangle ABC est isocèle en A et D est le symétrique de B par rapport à A.
Montrer que le triangle ADC est isocèle.

XII) On considère un triangle ABC. On désigne par I et J les milieux respectifs des segments $[AB]$ et $[AC]$.
Soit E le symétrique de C par rapport à I et F le symétrique de E par rapport à J.
1) Montrer que $EA = BC$ et (EA) est parallèle à (BC).
2) Montrer que $CF = BC$ et que B, C et F sont alignés.
3) Montrer que F est le symétrique de B par rapport à C.

XIII) Soit un triangle ABC, I le milieu de $[BC]$, et (d) la médiatrice de $[BC]$. (d) coupe (AB) en J. On appelle D le symétrique de A par rapport à I puis E le symétrique de A par rapport à (d) et K le symétrique de J par rapport à I.
1) Démontrer que les points K, D et C sont alignés.
2) Démontrer que : $AC = BE$.
3) Démontrer que : $AC = BD$.
4) En déduire la nature du triangle BED.

XIV) (d_1) et (d_2) sont deux droites sécantes en un point I.
Soit A un point n'appartenant à aucune de ces deux droites. On construit successivement le point B symétrique de A par rapport à (d_1), puis le point C symétrique de B par rapport à (d_2) et enfin le point D symétrique de C par rapport au point I.
1) Démontrer que : $IA = IB = IC = ID$.
2) Que peux-t-on en déduire concernant les points A, B, C et D ?