COMPLÉMENTS SUR LES CALCULS

I) ENSEMBLES DE NOMBRES

Avant un calcul contenant une variable, nous allons prendre l'habitude de définir cette variable à l'aide des notations ci-dessous :

1) Rappels

- $\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des entiers naturels (positifs)
- $\mathbb{Z}$ désigne l'ensemble des entiers relatifs (positifs ou négatifs)
- $\mathbb{D}$ désigne l'ensemble des décimaux (qui ont un nombre de décimales fini et peuvent donc s'écrire sous la forme $\dfrac{a}{10^n}$ avec $a \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$)

  Ex : $1{,}23 = \dfrac{123}{100} = \dfrac{123}{10^2}$ donc $1{,}23 \in \mathbb{D}$

  en revanche, $\dfrac{1}{3} \notin \mathbb{D}$!
- $\mathbb{Q}$ désigne l'ensemble des rationnels (quotients d'entiers : $\dfrac{\pi}{2} \notin \mathbb{Q}$!)
- $\mathbb{R}$ désigne l'ensemble des réels (tous les nombres connus en 2^de^)

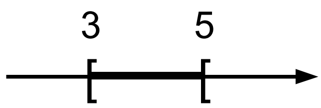
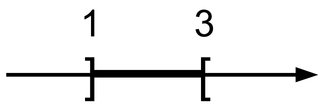
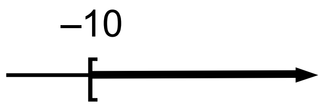
2) Notations complémentaires

- $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$
- $\mathbb{R}^+$ désigne l'ensemble des réels positifs ou nuls
- $\mathbb{Q}^*$ désigne l'ensemble des rationnels sauf zéro
- $\mathbb{R} \setminus \{1 ; 3\}$ désigne l'ensemble des réels sauf 1 et 3

p26: 8
+ commencer feuille 1.1

3) Intervalles de ℝ

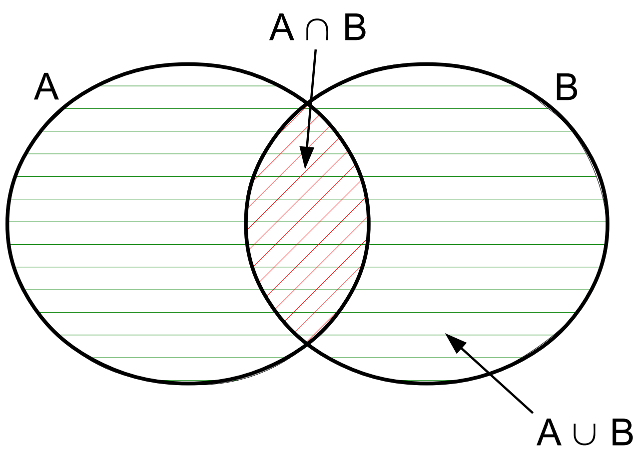
Un intervalle de ℝ est un ensemble de réels définis par un encadrement ou une inégalité.

L'ensemble des réels x tels que :	se représente graphiquement :	et se note :
$3 \leqslant x < 5$		[3 ; 5[
$3 > x > 1$		]1 ; 3[
$-10 \leqslant x$		[–10 ; +∞[

4) Intersections et réunions d'ensembles

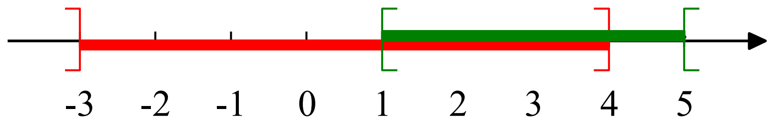
Soient deux ensembles A et B.

- La réunion de A et de B est l'ensemble des éléments qui appartiennent à A **<u>ou</u>** à B. On la note A ∪ B.
- L'intersection de A et de B est l'ensemble des éléments qui appartiennent à A **<u>et</u>** à B. On la note A ∩ B.

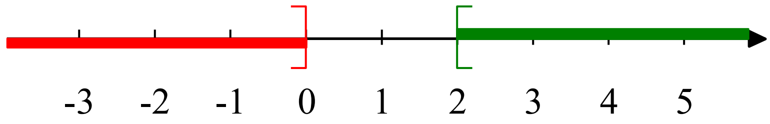


Ex avec des intervalles :

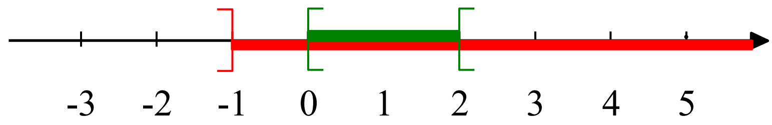
- $A = [1\ ;\ 5[$ et $B =]-3\ ;\ 4]$
  $A \cap B = [1\ ;\ 4]$
  $A \cup B =]-3\ ;\ 5[$



- $A = [2\ ;\ +\infty[$ et $B =]-\infty\ ;\ 0]$
  $A \cap B = \emptyset$
  $A \cup B =]-\infty\ ;\ 0] \cup [2\ ;\ +\infty[$



- $A = [0\ ;\ 2[$ et $B =]-1\ ;\ +\infty[$
  $A \cap B = [0\ ;\ 2[= A$
  $A \cup B =]-1\ ;\ +\infty[= B$



p25: 14
p26: 4, 5, 6, 7

+ feuille 1.2

II) VALEURS INTERDITES

1) Avec la calculatrice :

$\frac{1}{0}=$erreur $\sqrt{-1}=$erreur

On dit que 0 et –1 sont respectivement des « valeurs interdites » des expressions $\frac{1}{x}$ et $\sqrt{x}$.

2) Dans les exercices :

En conséquence, pour définir une variable contenue dans une expression, on cherchera l'ensemble des valeurs de cette variable pour lesquelles :

● les dénominateurs de l'expression sont non nuls

● les radicandes sont positifs ou nuls

Ex : Simplifier $A=\left(1+\frac{1}{\sqrt{a-1}}\right)\left(1-\frac{1}{\sqrt{a-1}}\right)\left(\frac{a-1}{a}\right)$

Conditions : $\begin{cases} a-1\geqslant 0 \\ \sqrt{a-1}\neq 0 \\ a\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a\geqslant 1 \\ a\neq 1 \\ a\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow a>1$

Pour tout a de]1 ; +∞[, on a :

$$A=\left(1-\frac{1}{a-1}\right)\left(\frac{a-1}{a}\right)$$

$$A=\left(\frac{a-1-1}{a-1}\right)\left(\frac{a-1}{a}\right)$$

$$A=\frac{a-2}{a}$$

cf feuille 1.1

III) RÈGLES DE CALCUL

1) Quotients :

CONDITION	RÈGLE
$a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}^*$	$\frac{-a}{b}=\frac{a}{-b}=-\frac{a}{b}$
$a \in \mathbb{R}$; $b \in \mathbb{R}^*$; $c \in \mathbb{R}$ et $d \in \mathbb{R}^*$	$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}$
$a \in \mathbb{R}$; $b \in \mathbb{R}^*$; $c \in \mathbb{R}$ et $d \in \mathbb{R}^*$	$\frac{a}{b}\times\frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$
$a \in \mathbb{R}$; $b \in \mathbb{R}^*$; $c \in \mathbb{R}^*$ et $d \in \mathbb{R}^*$	$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}=\frac{a}{b}\times\frac{d}{c}$

2) Racines :

CONDITION	RÈGLE
	$\sqrt{0}=0$
$a \in \mathbb{R}^+$	$\sqrt{a}\geqslant 0$
$a \in \mathbb{R}^+$	$\left(\sqrt{a}\right)^2=a$
$a \in \mathbb{R}^+$	$\sqrt{a^2}=a$
$a \in \mathbb{R}^-$	$\sqrt{a^2}=-a$
$a \in \mathbb{R}^+$ et $b \in \mathbb{R}^+$	$\sqrt{ab}=\sqrt{a}\sqrt{b}$
$a \in \mathbb{R}^+$ et $b \in \mathbb{R}^{+*}$	$\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$

Remarque : Il n'y a pas de règle avec $\sqrt{a+b}$

3) Puissances : (n et m entiers strictement positifs)

CONDITION	RÈGLE
$a \in \mathbb{R}^*$	$a^0 = 1$
$a \in \mathbb{R}^*$	$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$
$a \in \mathbb{R}$	$a^m \times a^n = a^{m+n}$
$a \in \mathbb{R}^*$	$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$
$a \in \mathbb{R}$	$(a^m)^n = a^{m \times n}$
$a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$	$(ab)^n = a^n b^n$
$a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}^*$	$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

Remarque : Il n'y a pas de règle avec $a^m + a^n$

4) Identités remarquables :

CONDITION	RÈGLE
$a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$	$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
$a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$	$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
$a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$	$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$

p75: 90
+ cf feuille 1.1

IV) FACTORISER UNE EXPRESSION

Factoriser une expression, c'est chercher à la transformer en un produit de facteurs du 1er degré. Pour cela, 3 techniques à essayer <u>dans l'ordre</u> :

1) D'abord, chercher un facteur commun

Pour tout x de $\mathbb{R}$:

$A=(4x-3)(x+2)-x(8x-6)-4x+3$
$A=(4x-3)(x+2)-2x(4x-3)-(4x-3)$
$A=(4x-3)[x+2-2x-1]$
$A=(4x-3)(1-x)$

2) Ensuite seulement, chercher une identité remarquable

Pour tout x de $\mathbb{R}$:

$B=32x^2-48x+18$
$B=2(16x^2-24x+9)$
$B=2(4x-3)^2$

Développer :
p75: 87, 88, 89
Factoriser :
p76: 95, 96, 97, 98, 99

+ cf feuille 1.1

3) Enfin, si l'expression est du 2nd degré, faire apparaître une identité remarquable

Pour tout x de $\mathbb{R}$:

$C = x^2 - 3x + 2$

rappel : $(x-b)^2 = x^2 - 2bx + b^2$

$C = x^2 - 3x + \left(\frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 + 2$

$C = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} + \frac{8}{4}$

$C = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$

reconnaître : $A^2 - B^2$

$C = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2$

$C = \left(x - \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\right)$

$C = (x-2)(x-1)$

Pour tout x de $\mathbb{R}$:

$D = 2x^2 + x - 3$

$D = 2\left(x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}\right)$

factoriser l'expression par le terme qui est devant le x^2

$D = 2\left[x^2 + \frac{1}{2}x + \left(\frac{1}{4}\right)^2 - \left(\frac{1}{4}\right)^2 - \frac{3}{2}\right]$

$D = 2\left[\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 - \frac{1}{16} - \frac{24}{16}\right]$

reconnaître $A^2 - B^2$

$D = 2\left[\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 - \left(\frac{5}{4}\right)^2\right]$

cf feuille 1.1

$D = 2\left[\left(x + \frac{1}{4} - \frac{5}{4}\right)\left(x + \frac{1}{4} + \frac{5}{4}\right)\right]$

Algo :
p28: 19, 21, 23
p70: 22

$D = 2(x-1)\left(x + \frac{3}{2}\right)$

$D = (x-1)(2x+3)$