2des Composition du 14 I 05 2h Corrigé succinct

I) 1) Déterminer D_f, D_g et $D_f \cap D_g$

$x \in D_f \Leftrightarrow 1-x^2 \neq 0 \Leftrightarrow (1-x)(1+x) \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -1$ et $x \neq 1$ donc $\boxed{D_f = \mathbb{R} - \{-1;1\}}$ (1)

$x \in D_g \Leftrightarrow x+1 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -1$ donc $\boxed{D_g = \mathbb{R} - \{-1\}}$ (1)

$x \in D_f \cap D_g \Leftrightarrow x \in D_f$ et $x \in D_g$ donc $\boxed{D_f \cap D_g = \mathbb{R} - \{-1;1\}}$ (1)

2) Images par f

$f(-3) = \dfrac{2(-3)+5}{1-(-3)^2} = \dfrac{-1}{-8} = \boxed{\dfrac{1}{8}}$ (1) $\qquad f\left(\frac{1}{2}\right) = \dfrac{2\left(\frac{1}{2}\right)+5}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2} = \dfrac{6}{3/4} = \boxed{8}$ (1)

3) Positions relatives de C_f et C_g

Pour tout x de $D_f \cap D_g$, déterminons le signe de $f(x) - g(x)$:

$$f(x) - g(x) = \frac{2x+5}{1-x^2} - \frac{-3}{x+1} = \frac{2x+5}{(1-x)(1+x)} + \frac{3(1-x)}{(1-x)(1+x)} = \frac{2x+5+3-3x}{(1-x)(1+x)} = \frac{8-x}{(1-x)(1+x)}$$ (2)

Tableau de signe :

x	$-\infty$		-1		1		8		$+\infty$
$8-x$		+	|	+	|	+	0	−	
$1-x$		+	|	+	0	−	|	−	
$1+x$		−	0	+	|	+	|	+	
Q		−	‖	+	‖	−	0	+	

(2)

Bilan : $\boxed{\begin{array}{l} C_f \text{ est au dessous de } C_g \text{ pour } x \text{ appartenant} \\ \text{à }]-\infty;-1[\text{ ou à }]1;8[\\ C_f \text{ est au dessus de } C_g \text{ pour } x \text{ appartenant} \\ \text{à }]-1;1[\text{ ou à }]8;+\infty[\end{array}}$ (2)

4) Antécédents par f

Résolvons (E_1) : $f(x) = 0 \quad (x \in D_f)$

$(E_1) \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2x+5}{1-x^2} = 0 \\ x \neq -1 \text{ et } x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+5 = 0 \\ x \neq -1 \text{ et } x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = -\frac{5}{2}$

$\boxed{-\frac{5}{2} \text{ est donc l'unique antécédent de 0 par } f}$ (1)

Résolvons (E_2) : $f(x) = \frac{1}{2} \quad (x \in D_f)$

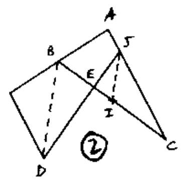
$(E_2) \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2x+5}{1-x^2} = \frac{1}{2} \\ x \neq -1 \text{ et } x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(2x+5) = 1-x^2 \\ x \neq -1 \text{ et } x \neq 1 \end{cases}$

$(E_2) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+4x+9 = 0 \\ x \neq -1 \text{ et } x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+2)^2 = -5 \\ x \neq -1 \text{ et } x \neq 1 \end{cases}$

or un carré ne peut être négatif !

donc $\boxed{\frac{1}{2} \text{ n'a pas d'antécédent par } f}$ (2)

II)



(2)

1) $\overrightarrow{BD}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$

Par (H) $2\overrightarrow{BD} + 3\overrightarrow{CD} = 8\overrightarrow{AB}$ donc $2\overrightarrow{BD} + 3\overrightarrow{CA} + 3\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{BD} = 8\overrightarrow{AB}$

donc $5\overrightarrow{BD} = 5\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC}$ donc $\boxed{\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AB} + \frac{3}{5}\overrightarrow{AC}}$

donc D est l'image de B par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB} + \frac{3}{5}\overrightarrow{AC}$ (2)

2) $\overrightarrow{IJ}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AJ}$

$\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA} + \frac{1}{5}\overrightarrow{AC}$ (par (H) I milieu de [BC] et $\overrightarrow{AJ} = \frac{1}{5}\overrightarrow{AC}$)

$\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} + \frac{1}{5}\overrightarrow{AC}$

$\boxed{\overrightarrow{IJ} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{3}{10}\overrightarrow{AC}}$ (2)

3) Montrer que (BD) est parallèle à (IJ)

D'après 2) $\overrightarrow{IJ} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{3}{10}\overrightarrow{AC}$

$= -\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \frac{3}{5}\overrightarrow{AC}\right)$

$= -\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$ (d'après 1))

donc $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{BD}$ sont colinéaires

donc $\boxed{(BD) \text{ et } (IJ) \text{ sont parallèles}}$ (2)

4) Montrer que E appartient à (DJ)

$\overrightarrow{EJ} = \overrightarrow{EC} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AJ}$

$\overrightarrow{EJ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AC} + \frac{1}{5}\overrightarrow{AC}$ (par (H) $\overrightarrow{CE} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CB}$ et $\overrightarrow{AJ} = \frac{1}{5}\overrightarrow{AC}$)

$\overrightarrow{EJ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AC} + \frac{1}{5}\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{EJ} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{2}{15}\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{DJ} = \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AJ}$

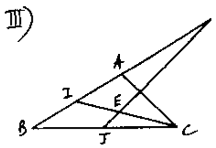
$= -\overrightarrow{AB} - \frac{3}{5}\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} + \frac{1}{5}\overrightarrow{AC}$ (d'après 1) $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AB} + \frac{3}{5}\overrightarrow{AC}$ par (H) $\overrightarrow{AJ} = \frac{1}{5}\overrightarrow{AC}$)

$= -2\overrightarrow{AB} - \frac{2}{5}\overrightarrow{AC}$

or on remarque que $3\overrightarrow{EJ} = 3\left(-\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{2}{15}\overrightarrow{AC}\right) = -2\overrightarrow{AB} - \frac{2}{5}\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{DJ}$

donc $\overrightarrow{DJ}$ et $\overrightarrow{EJ}$ sont colinéaires et donc $\boxed{\text{E appartient à (DJ)}}$ (2)

III)



1) $(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})$ repère du plan ?

Par (H) ABC est un triangle non aplati donc $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires

donc $(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC})$ forme une base du plan donc $\boxed{(A;\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}) \text{ est bien un repère}}$ (1)

2) Coordonnées de A, B, C, D, I et J

Par (H) A est l'origine du repère donc $\boxed{A(0;0)}$

$\overrightarrow{AB} = 1\overrightarrow{AB} + 0\overrightarrow{AC}$ donc $\boxed{B(1;0)}$

$\overrightarrow{AC} = 0\overrightarrow{AB} + 1\overrightarrow{AC}$ donc $\boxed{C(0;1)}$ (3)

Par (H) D est le symétrique de B par rapport à A

donc $\overrightarrow{AD} = -\overrightarrow{AB}$ donc $\boxed{D(-1;0)}$

Par (H) I est le milieu de [AB] donc $\begin{cases} x_I = \frac{x_A+x_B}{2} = \frac{1}{2} \\ y_I = \frac{y_A+y_B}{2} = 0 \end{cases}$

donc $\boxed{I\left(\frac{1}{2};0\right)}$

Par (H) J est le milieu de [CB] donc $\begin{cases} x_J = \frac{x_C+x_B}{2} = \frac{1}{2} \\ y_J = \frac{y_C+y_B}{2} = \frac{1}{2} \end{cases}$

donc $\boxed{J\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)}$

3) 4) Coordonnées de $\overrightarrow{CI}$, $\overrightarrow{CE}$ et E

$x_I - x_C = \frac{1}{2}$ et $y_I - y_C = -1$ donc $\boxed{\overrightarrow{CI}\left(\frac{1}{2};-1\right)}$ (1)

Par (H) $\overrightarrow{CE} = k\overrightarrow{CI}$ et $\overrightarrow{CI}\left(\frac{1}{2};-1\right)$ donc $\boxed{\overrightarrow{CE}\left(\frac{k}{2};-k\right)}$ (1)

donc $\begin{cases} x_E - x_C = \frac{k}{2} \\ y_E - y_C = -k \end{cases}$ donc $\begin{cases} x_E = \frac{k}{2} \\ y_E = 1-k \end{cases}$ donc $\boxed{E\left(\frac{k}{2};1-k\right)}$ (1)

5) Déterminer k

Par (H), J, E et D sont alignés

donc $\overrightarrow{JE}\left(\frac{k}{2}-\frac{1}{2};\frac{1}{2}-k\right)$ est colinéaire à $\overrightarrow{DJ}\left(\frac{3}{2};\frac{1}{2}\right)$

donc $\frac{1}{2}\left(\frac{k-1}{2}\right) - \frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}-k\right) = 0$

donc $k-1 = 3(1-2k)$ donc $\boxed{k = \frac{4}{7}}$ (3)

donc $E\left(\frac{\frac{4}{7}}{2};1-\frac{4}{7}\right)$ donc $\boxed{E\left(\frac{2}{7};\frac{3}{7}\right)}$ (1)

6) Équation de (JD) Soit M(x;y) un point quelconque

$M \in (JD) \Leftrightarrow \overrightarrow{DM}(x+1;y)$ est colinéaire à $\overrightarrow{DJ}\left(\frac{3}{2};\frac{1}{2}\right)$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(x+1) - \frac{3}{2}y = 0$

$\Leftrightarrow x+1 = 3y$

$\Leftrightarrow \boxed{y = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}}$ (1,5)

Équation de (IC)

$M \in (IC) \Leftrightarrow \overrightarrow{CM}(x;y-1)$ est colinéaire à $\overrightarrow{CI}\left(\frac{1}{2};-1\right)$

$\Leftrightarrow -x - \frac{1}{2}(y-1) = 0$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}y - \frac{1}{2} + x = 0$

$\Leftrightarrow \boxed{y = -2x+1}$ (1,5)

7) Coordonnées de E

Par (H) $\begin{cases} E \in (JD) \\ E \in (IC) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_E = \frac{1}{3}x_E + \frac{1}{3} \\ y_E = -2x_E + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{3}x_E + \frac{1}{3} = -2x_E + 1 \\ y_E = -2x_E + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{7}{3}x_E = \frac{2}{3} \\ y_E = -2x_E + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_E = \frac{2}{7} \\ y_E = \frac{3}{7} \end{cases}$

donc $\boxed{E\left(\frac{2}{7};\frac{3}{7}\right)}$ (2)

2^k Composition du 16 I 08 2^{4} Corrigé succinct

I) Résoudre :

$(S_1) : \begin{cases} \frac{5}{7}x + y = \frac{10}{7} & (1) \\ 7x + \frac{49}{5}y = 14 & (2) \end{cases}$ $\begin{vmatrix} \frac{5}{7} & 1 \\ 7 & \frac{49}{5} \end{vmatrix} = \frac{5}{7} \times \frac{49}{5} - 7 = 7 - 7 = 0$

le déterminant est nul et on remarque que $(2;0)$ est solution de (1) et de (2) donc ces équations sont équivalentes

$(S_1) \Leftrightarrow \frac{5}{7}x + y = \frac{10}{7} \Leftrightarrow y = -\frac{5}{7}x + \frac{10}{7}$

$\boxed{S = \left\{ \left(\alpha ; -\frac{5}{7}\alpha + \frac{10}{7}\right) \right\} \text{ avec } \alpha \text{ décrivant } \mathbb{R}}$ 3

$(S_2) : \begin{cases} \frac{1}{3}x + \frac{4}{5}y = -1 & (1) \\ 5x + 12y = 3 & (2) \end{cases}$ $\begin{vmatrix} \frac{1}{3} & \frac{4}{5} \\ 5 & 12 \end{vmatrix} = \frac{1}{3} \times 12 - \frac{4}{5} \times 5 = 4 - 4 = 0$

le déterminant est nul et on remarque que $(-3;0)$ est solution de (1) mais pas de (2) donc ces éq. sont incompatibles

$\boxed{S = \emptyset}$ 2

$(S_3) : \begin{cases} \frac{3}{x} - 5y^2 = 2 \\ \frac{7}{x} + 3y^2 = 12 \end{cases}$

Pour tout x de $\mathbb{R}^*$ et y de $\mathbb{R}$, posons $X = \frac{1}{x}$ et $Y = y^2$ et résolvons :

$(S'_3) : \begin{cases} 3X - 5Y = 2 & (1) \\ 7X + 3Y = 12 & (2) \end{cases}$ $\begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 7 & 3 \end{vmatrix} = 9 + 35 = 44 \neq 0$

donc (S'_3) a un unique couple solution

$(S'_3) \Leftrightarrow \begin{cases} 44X = 66 & 3(1)+5(2) \\ 5Y = 3X - 2 \end{cases}$

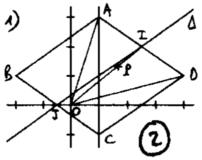
$(S'_3) \Leftrightarrow \begin{cases} X = \frac{3}{2} \\ Y = \frac{1}{2} \end{cases}$

donc $(S_3) \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{x} = \frac{3}{2} \\ y^2 = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{3} \\ y = -\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ ou } y = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$

$\boxed{S = \left\{ \left(\frac{2}{3} ; -\frac{\sqrt{2}}{2}\right) ; \left(\frac{2}{3} ; \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \right\}}$ 3

II)

1)



2

2) Equation de (AC)

On remarque que $x_A = x_C = 1$ donc (AC) est verticale et a pour éq : $\boxed{x = 1}$ 1,5

3) Coordonnées de D

ABCD est un parallélogramme $\Leftrightarrow \vec{CD} = \vec{BA} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D - x_C = x_A - x_B \\ y_D - y_C = y_A - y_B \end{cases} \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \begin{cases} x_D = 4 \\ y_D = 1 \end{cases}$ $\boxed{D(4;1)}$ 1,5

4) Calcul de AD : $AD = \sqrt{(x_D - x_A)^2 + (y_D - y_A)^2} = \sqrt{9+4} = \boxed{\sqrt{13}}$

Calcul de DC : $DC = \sqrt{(x_C - x_D)^2 + (y_C - y_D)^2} = \sqrt{9+4} = \boxed{\sqrt{13}}$

Donc le parallélogramme ABCD a deux côtés consécutifs de même longueur et est $\boxed{\text{un losange}}$ 1,5

5) Coordonnées de I :

Par (H) I est le milieu de [AD] donc :

$x_I = \frac{x_A + x_D}{2} = \frac{5}{2}$

$y_I = \frac{y_A + y_D}{2} = 2$

$I\left(\frac{5}{2} ; 2\right)$

Equation de Δ :

Soit M un point quelconque

$M(x;y) \in \Delta \Leftrightarrow \vec{IM}\left(x - \frac{5}{2} ; y - 2\right)$ est colin. à $\vec{BA}(3;2)$

$\Leftrightarrow 2\left(x - \frac{5}{2}\right) - 3(y-2) = 0$

$\Leftrightarrow 2x - 5 - 3y + 6 = 0$

$\Leftrightarrow 3y = 2x + 1$

$\Leftrightarrow \boxed{y = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}}$ 3

6) Coordonnées de J

$\begin{cases} J \in (Ox) \\ J \in \Delta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_J = 0 \\ y_J = \frac{2}{3}x_J + \frac{1}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2}{3}x_J + \frac{1}{3} = 0 \\ y_J = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_J = -\frac{1}{2} \\ y_J = 0 \end{cases}$

$\boxed{J\left(-\frac{1}{2};0\right)}$ 1,5

7) Montrer que P est le centre de gravité de OAD

Par (H) $P\left(\frac{5}{3} ; \frac{4}{3}\right)$ donc $\vec{OP}\left(\frac{5}{3} ; \frac{4}{3}\right)$

D'après 5) $I\left(\frac{5}{2} ; 2\right)$ donc $\vec{OI}\left(\frac{5}{2} ; 2\right)$

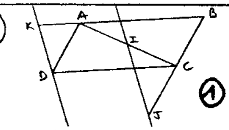
On remarque, que :

$\begin{cases} \frac{2}{3} x_{\vec{OI}} = \frac{2}{3} \times \frac{5}{2} = \frac{5}{3} = x_{\vec{OP}} \\ \frac{2}{3} y_{\vec{OI}} = \frac{2}{3} \times 2 = \frac{4}{3} = y_{\vec{OP}} \end{cases}$

donc $\vec{OP} = \frac{2}{3}\vec{OI}$ avec I milieu de [AD]

donc $\boxed{\text{P est le centre de gravité de OAD}}$ 3

III)



1

1) Exprimer $\vec{AK}$ en fonction de $\vec{AB}$

Par (H) $4\vec{AK} - \vec{BK} = \vec{0}$

$4\vec{AK} = \vec{BK}$

$4\vec{AK} = \vec{BA} + \vec{AK}$

$3\vec{AK} = \vec{AB}$

$\boxed{\vec{AK} = -\frac{1}{3}\vec{AB}}$ 1

3) Montrer que : (IJ) // (DK)

$\vec{IJ} = \vec{IC} + \vec{CJ}$

$= \frac{1}{2}\vec{AC} - \vec{CB}$ (par (H) I milieu de [AC] donc $\vec{IC} = \frac{1}{2}\vec{AC}$ ET J symétrique de B par rapport à C donc $\vec{CJ} = -\vec{CB}$)

$= \frac{1}{2}(\vec{AB} + \vec{AD}) + \vec{BC}$ (par (H) ABCD est un parallélogramme donc $\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{AD}$)

$= \frac{1}{2}\vec{AB} + \frac{1}{2}\vec{AD} + \vec{AD}$ (par (H) ABCD est un parallélogramme donc $\vec{BC} = \vec{AD}$)

$\vec{IJ} = \frac{1}{2}\vec{AB} + \frac{3}{2}\vec{AD}$

$\vec{DK} = \vec{DA} + \vec{AK}$

$\vec{DK} = -\frac{1}{3}\vec{AB} - \vec{AD}$ (d'après 1) $\vec{AK} = -\frac{1}{3}\vec{AB}$)

On remarque que $-\frac{3}{2}\vec{DK} = -\frac{3}{2}\left(-\frac{1}{3}\vec{AB} - \vec{AD}\right) = \frac{1}{2}\vec{AB} + \frac{3}{2}\vec{AD} = \vec{IJ}$

donc $\vec{IJ}$ et $\vec{DK}$ sont colinéaires donc $\boxed{\text{(IJ) et (DK) sont parallèles}}$ 3

4) a) $\vec{KC}$ en fonction de $\vec{AB}$ et $\vec{AD}$

$\vec{KC} = \vec{KA} + \vec{AC}$

$\vec{KC} = \frac{1}{3}\vec{AB} + (\vec{AB} + \vec{AD})$ (d'après 1) $\vec{AK} = -\frac{1}{3}\vec{AB}$ et par (H) ABCD est un parallélogramme donc $\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{AD}$)

$\boxed{\vec{KC} = \frac{4}{3}\vec{AB} + \vec{AD}}$ 1

$\vec{KL}$ en fonction de $\vec{AB}$ et $\vec{AD}$

$\vec{KL} = \vec{KA} + \vec{AL}$

$\boxed{\vec{KL} = \frac{1}{3}\vec{AB} + a\vec{AD}}$ 1 (d'après 1) $\vec{AK} = -\frac{1}{3}\vec{AB}$ et par (H), $\vec{AL} = a\vec{AD}$)

b) Coordonnées de $\vec{KC}$ et $\vec{KL}$

De a), on déduit directement que dans la base $(\vec{AB} ; \vec{AD})$ on a : $\boxed{\vec{KC}\left(\frac{4}{3};1\right) \text{ et } \vec{KL}\left(\frac{1}{3};a\right)}$ 1

c) Déterminer a pour que K, L et C soient alignés

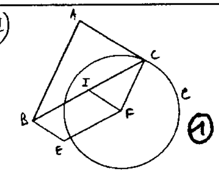
K, L, C alignés $\Leftrightarrow \vec{KC}\left(\frac{4}{3};1\right)$ et $\vec{KL}\left(\frac{1}{3};a\right)$ colinéaires

$\Leftrightarrow \frac{4}{3} \times a - 1 \times \frac{1}{3} = 0$

$\Leftrightarrow 4a = 1$

$\Leftrightarrow \boxed{a = \frac{1}{4}}$ 2

IV)



1

1) Construire E

$\vec{BE} = \frac{1}{2}\vec{AC}$ donc E est l'image de B par la translation de vecteur $\frac{1}{2}\vec{AC}$ 0,5

Construire F

$\vec{FB} + 2\vec{FC} - \vec{FA} = \vec{0} \Leftrightarrow \cancel{\vec{FC}} + \vec{CB} + 2\vec{FC} - \cancel{\vec{FC}} - \vec{CA} = \vec{0} \Leftrightarrow 2\vec{FC} = \vec{BC} + \vec{CA} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2\vec{FC} = \vec{BA} \Leftrightarrow \boxed{\vec{CF} = \frac{1}{2}\vec{AB}}$ F est donc l'image de C par la translation de vecteur $\frac{1}{2}\vec{AB}$ 1

2) Montrer que $\vec{BE} = \vec{IF}$

$\vec{IF} = \vec{IC} + \vec{CF} = \frac{1}{2}\vec{BC} + \frac{1}{2}\vec{AB} = \frac{1}{2}(\vec{AB} + \vec{BC}) = \frac{1}{2}\vec{AC} = \boxed{\vec{BE}}$ donc $\boxed{\text{BEFI est un parallélogramme}}$ 2

(Par (H) I milieu de [BC] donc $\vec{IC} = \frac{1}{2}\vec{BC}$ et d'après 1) $\vec{CF} = \frac{1}{2}\vec{AB}$)

(par (H) $\vec{BE} = \frac{1}{2}\vec{AC}$)

3) Montrer que $\vec{MB} + 2\vec{MC} - \vec{MA} = 2\vec{MF}$

Pour tout point M du plan,

$\vec{MB} + 2\vec{MC} - \vec{MA} = \vec{MF} + \vec{FB} + 2\vec{MF} + 2\vec{FC} - \vec{MF} - \vec{FA}$

$= 2\vec{MF} + \vec{FB} + 2\vec{FC} - \vec{FA}$

$= 2\vec{MF}$ (par (H) $\vec{FB} + 2\vec{FC} - \vec{FA} = \vec{0}$)

Bilan $\boxed{\vec{MB} + 2\vec{MC} - \vec{MA} = 2\vec{MF}}$ 1,5

Ensemble des points tels que $\|\vec{MB} + 2\vec{MC} - \vec{MA}\| = \|\vec{AB}\|$

$\|\vec{MB} + 2\vec{MC} - \vec{MA}\| = \|\vec{AB}\| \Leftrightarrow \|2\vec{MF}\| = \|\vec{AB}\|$ (cf début de 3))

$\Leftrightarrow 2MF = AB$

$\Leftrightarrow FM = \frac{AB}{2}$

$\Leftrightarrow FM = FC$ (d'après 1) $\vec{CF} = \frac{1}{2}\vec{AB}$)

l'ensemble cherché est donc $\boxed{\text{le cercle de centre F passant par C}}$ 2

2K Composition du 22I07 2h Corrigé succinct

I) 1) Résoudre (S) : $\begin{cases} 3x+4y=26 & (1)\\ -2x+y=1 & (2)\end{cases}$

$D = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 3+8 = 11$

$D \neq 0$ donc le système admet un unique couple solution.

$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} 11x = 22 & (1)-4(2) \\ y = 1+2x \end{cases}$

$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=5 \end{cases}$ $\boxed{\mathcal{S}_{(S)} = \{(2;5)\}}$ 2

2) Résoudre (S_1) : $\begin{cases} \frac{3}{x}+\frac{4}{y} = 26 \\ -\frac{2}{x}+\frac{1}{y} = 1 \end{cases}$

En posant $X = \frac{1}{x}$ et $Y = \frac{1}{y}$ $(x \neq 0$ et $y \neq 0)$ on retrouve le système (S) donc :

$(S_1) \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{x} = 2 \\ \frac{1}{y} = 5 \end{cases}$

$(S_1) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = \frac{1}{5} \end{cases}$ $\boxed{\mathcal{S}_{(S_1)} = \{(\frac{1}{2};\frac{1}{5})\}}$ 2

Résoudre (S_2) : $\begin{cases} 3x^2+4y^2 = 26 \\ -2x^2+y^2 = 1 \end{cases}$

En posant $X = x^2$ et $Y = y^2$ on retrouve (S) donc :

$(S_2) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 2 \\ y^2 = 5 \end{cases}$

$(S_2) \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\sqrt{2} \text{ ou } x = \sqrt{2} \\ y = -\sqrt{5} \text{ ou } y = \sqrt{5} \end{cases}$ 4

$\boxed{\mathcal{S}_{(S_2)} = \{(-\sqrt{2};-\sqrt{5});(-\sqrt{2};\sqrt{5});(\sqrt{2};-\sqrt{5});(\sqrt{2};\sqrt{5})\}}$

II) $\overrightarrow{MN}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$:

$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AN}$

$\overrightarrow{MN} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ (par (H) $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$)

$\boxed{\overrightarrow{MN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}}$ 1

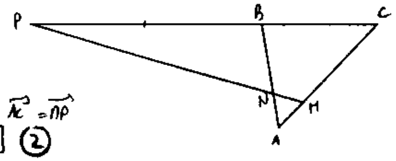
$\overrightarrow{MP}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$:

$\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BP}$

$\overrightarrow{MP} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{CB}$ (par (H) $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BP} = 2\overrightarrow{CB}$)

$\overrightarrow{MP} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{AB}$

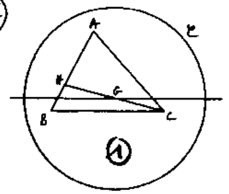
$\boxed{\overrightarrow{MP} = 3\overrightarrow{AB} - \frac{9}{4}\overrightarrow{AC}}$ 2



En déduire que M, N et P sont alignés.

D'après ce qui précède, $9\overrightarrow{MN} = 9(\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}) = 3\overrightarrow{AB} - \frac{9}{4}\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{MP}$
donc $\overrightarrow{MP}$ est colinéaire à $\overrightarrow{MN}$ donc $\boxed{\text{M, N et P sont alignés}}$ 2

III)



1) Construire G

$\overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{GB} + 3\overrightarrow{GC} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{GA} + 3\overrightarrow{AC} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow 6\overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AG} = \frac{2}{6}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{6}\overrightarrow{AC}$

$\Leftrightarrow \boxed{\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}}$ 2

G est donc l'image de A par la translation de vecteur $\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

2) Montrer que G est le milieu de [HC]

$\overrightarrow{GH} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{GH} + \overrightarrow{GC} = 2\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{GH} + \overrightarrow{GC} = -\cancel{\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}} - \cancel{\overrightarrow{AC}} + \cancel{\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}} + \cancel{\overrightarrow{AC}}$

(d'après 1) $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$
et par (H) $\overrightarrow{AH} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$)

$\overrightarrow{GH} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$

donc $\boxed{\text{G est bien le milieu de [HC]}}$ 3

3) Montrer que : $\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC} = 6\overrightarrow{MG}$

Pour tout point M :

$\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{MG} + 2\overrightarrow{GB} + 3\overrightarrow{MG} + 3\overrightarrow{GC}$

$\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC} = 6\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{GB} + 3\overrightarrow{GC}$

$\boxed{\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC} = 6\overrightarrow{MG}}$ (par (H) $\overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{GB} + 3\overrightarrow{GC} = \vec{0}$)

1

4) Déterminer l'ensemble des points M tels que :

a) $\|\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC}\| = 6AB$ (H_1)

$(H_1) \Leftrightarrow \|6\overrightarrow{MG}\| = 6AB$ (d'après 3) $\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC} = 6\overrightarrow{MG}$)

$\Leftrightarrow 6MG = 6AB$

$\Leftrightarrow GM = AB$

$\Leftrightarrow M \in \boxed{\mathcal{C}(G;AB)}$ 2

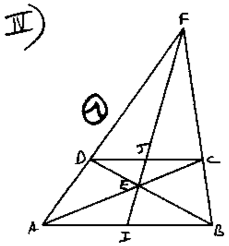
b) $\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC}$ est colinéaire à $\overrightarrow{BC}$ (H_2)

$(H_2) \Leftrightarrow 6\overrightarrow{MG}$ est colinéaire à $\overrightarrow{BC}$ (d'après 3))

$\Leftrightarrow \overrightarrow{GM}$ est colinéaire à $\overrightarrow{BC}$

$\Leftrightarrow$ M appartient $\boxed{\text{à la parallèle à (BC) passant par G}}$ 2

IV)



1) Coordonnées des points de la figure dans $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$

- le repère est $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD})$ donc $\boxed{A(0;0) \; ; \; B(1;0) \text{ et } D(0;1)}$
- $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}$
  $= \overrightarrow{AD} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ (par (H) $\overrightarrow{DC} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$) donc $\boxed{C(\frac{2}{3};1)}$ 1
- par (H) I milieu de [AB] donc $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ donc $\boxed{I(\frac{1}{2};0)}$ 1
- par (H) J milieu de [DC] donc $\overrightarrow{DJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DC}$ donc $\overrightarrow{DJ} = \frac{1}{2}(\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}) = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$
  donc $\overrightarrow{AJ} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DJ} = \overrightarrow{AD} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ donc $\boxed{J(\frac{1}{3};1)}$ 1 (par (H) $\overrightarrow{DC} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$)

2) Equation de (AC) : Soit $M(x;y)$ un point qcq

$M(x;y) \in (AC) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}(x;y)$ est colinéaire à $\overrightarrow{AC}(\frac{2}{3};1)$

$\Leftrightarrow x - \frac{2}{3}y = 0$

$\Leftrightarrow \boxed{y = \frac{3}{2}x}$ 2

Equation de (BD) : Soit $M(x;y)$ un point qcq

$M(x;y) \in (BD) \Leftrightarrow \overrightarrow{BM}(x-1;y)$ est colinéaire à $\overrightarrow{BD}(-1;1)$

$\Leftrightarrow x - 1 + y = 0$

$\Leftrightarrow \boxed{y = -x+1}$ 2

Coordonnées de E : par (H) E est l'intersection de (AC) et (BD)

$\begin{cases} E \in (AC) \\ E \in (BD) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_E = \frac{3}{2}x_E \\ y_E = -x_E + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_E = \frac{3}{2}x_E \\ \frac{3}{2}x_E = -x_E + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_E = \frac{2}{5} \\ y_E = \frac{3}{5} \end{cases}$ $\boxed{E(\frac{2}{5};\frac{3}{5})}$ 1

3) Equation de (AD) :

(AD) est l'axe des ordonnées !

sa équation est donc : $\boxed{x = 0}$ 1

Equation de (BC) : Soit $M(x;y)$ un point qcq

$M(x;y) \in (BC) \Leftrightarrow \overrightarrow{BM}(x-1;y)$ est colinéaire à $\overrightarrow{BC}(-\frac{1}{3};1)$

$\Leftrightarrow x - 1 + \frac{1}{3}y = 0$

$\Leftrightarrow \boxed{y = -3x+3}$ 2

Coordonnées de F : par (H) F est l'intersection de (AD) et (BC)

$\begin{cases} F \in (AD) \\ F \in (BC) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_F = 0 \\ y_F = -3x_F + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_F = 0 \\ y_F = 3 \end{cases}$ $\boxed{F(0;3)}$ 1

4) Montrer que E, F, I et J sont alignés :

Déterminons l'équation de (IF) :

Soit $M(x;y)$ un point quelconque,

$M(x;y) \in (IF) \Leftrightarrow \overrightarrow{IM}(x-\frac{1}{2};y)$ est colinéaire à $\overrightarrow{IF}(-\frac{1}{2};3)$

$\Leftrightarrow 3(x-\frac{1}{2}) + \frac{1}{2}y = 0$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}y = -3x + \frac{3}{2}$

$\Leftrightarrow y = -6x+3$

or $-6x_E + 3 = -6 \times \frac{2}{5} + 3 = \frac{3}{5} = y_E$
donc $E \in (IF)$

et $-6x_J + 3 = -6 \times \frac{1}{3} + 3 = 1 = y_J$
donc $J \in (IF)$

Bilan, $\boxed{\text{E, F, I et J sont alignés}}$ 3

2^{JK} DS du 14/XII/04 2h Corrigé succinct

I) $d_1 : \boxed{y=2}$ $d_2 : \boxed{y=-\frac{1}{2}x+3}$ $d_3 : \boxed{y=\frac{1}{3}x-1}$ $d_4 : \boxed{x=-2}$ $d_5 : \boxed{y=-\frac{2}{3}x-1}$ $d_6 : \boxed{y=\frac{4}{3}x+\frac{7}{3}}$ (4)

II) 1) Dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$:

$\boxed{A(-4;5) \quad B(3;5) \quad C(5;-1)}$ (1)

équation de (AB) :

$y_A = y_B = 5$ donc (AB) est horizontale et a pour équation $\boxed{y=5}$ (1)

équation de (BC) :

$M(x;y) \in (BC) \Leftrightarrow \overrightarrow{BM}(x-3;y-5)$ est colinéaire à $\overrightarrow{BC}(2;-6)$

$\Leftrightarrow -6(x-3)-2(y-5)=0$

$\Leftrightarrow 3(x-3)+(y-5)=0$

$\Leftrightarrow \boxed{y=-3x+14}$ (2)

2) Dans le repère $(O;\vec{u};\vec{v})$

$\boxed{A(-1;2) \quad B(2;1) \quad C(2;-1)}$ (1)

équation de (AB) :

$M(x;y) \in (AB) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}(x+1;y-2)$ est colinéaire à $\overrightarrow{AB}(3;-1)$

$\Leftrightarrow -(x+1)-3(y-2)=0$

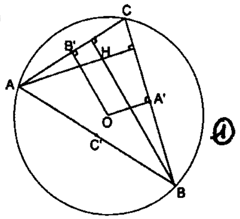
$\Leftrightarrow x+1+3y-6=0$

$\Leftrightarrow \boxed{y=-\frac{1}{3}x+\frac{5}{3}}$ (2)

équation de (BC) :

$x_B = x_C = 2$ donc (BC) est parallèle à l'axe des ordonnées et a pour équation : $\boxed{x=2}$ (1)

III)



(1)

1) • $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OH}$

$= \cancel{\overrightarrow{AO}}+\cancel{\overrightarrow{OA}}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$ (par (H) $\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$)

$= \overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$

$= \overrightarrow{OA'}+\overrightarrow{A'B}+\overrightarrow{OA'}+\overrightarrow{A'C}$

$= 2\overrightarrow{OA'}+\overrightarrow{A'B}+\overrightarrow{A'C}$

$= 2\overrightarrow{OA'}$ (par (H) $\overrightarrow{A'B}+\overrightarrow{A'C}=\vec{0}$) (3)

donc $\overrightarrow{AH}$ est colinéaire à $\overrightarrow{OA'}$

donc si O est distinct de A', (AH) est parallèle à (OA'). (1)

• Or par (H), O est le centre du cercle circonscrit à ABC donc O appartient à la médiatrice de [BC] et A' est le milieu de [BC] donc A' ______

donc (OA') est perpendiculaire à (BC) (2)

• Bilan, d'après (1) et (2), $(AH) \parallel (OA')$ et $(OA') \perp (BC)$ donc $(AH) \perp (BC)$

donc $\boxed{\text{(AH) est la hauteur issue de A du triangle ABC}}$ (3) (si O est distinct de A', c'est à dire ABC non rectangle en A)

2) De même $\overrightarrow{BH} = \overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OH} = \cancel{\overrightarrow{BO}}+\overrightarrow{OA}+\cancel{\overrightarrow{OB}}+\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OB'}+\overrightarrow{B'A}+\overrightarrow{OB'}+\overrightarrow{B'C} = 2\overrightarrow{OB'}$ (1,5)

donc $\overrightarrow{BH}$ est colinéaire à $\overrightarrow{OB'}$ et si O est distinct de B' alors (BH) est parallèle à (OB') (1)

Or O et B' appartiennent à la médiatrice de [AC] et (OB') est perpendiculaire à (AC) (2)

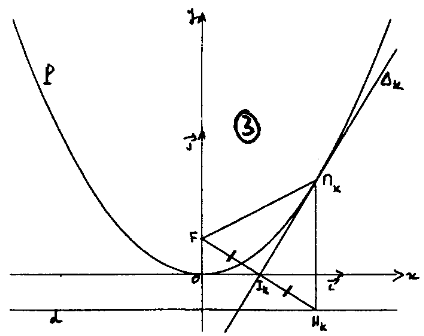
Bilan, d'après (1) et (2), $(BH) \perp (AC)$

donc $\boxed{\text{(BH) est la hauteur issue de B du triangle ABC}}$ (1,5) (si O distinct de B', c'est à dire ABC non rectangle en B)

3) Conclusion : D'après 1) et 2) H est l'intersection de deux hauteurs de ABC

$\boxed{\text{H est donc l'orthocentre du triangle ABC}}$ (2)

IV)



(3)

1) ⓐ par (H) d a pour équation $y=-\frac{1}{4}$ donc d est horizontale et M se projette verticalement sur d donc $x_H = x_M = x$

de plus H appartient à d donc $y_H = -\frac{1}{4}$

Bilan $\boxed{H(x;-\frac{1}{4})}$ (1)

ⓑ $M(x;y) \in P \Leftrightarrow MF = MH$

$\Leftrightarrow MF^2 = MH^2$ (les distances sont toujours positives)

$\Leftrightarrow (x_F-x_M)^2+(y_F-y_M)^2 = (x_H-x_M)^2+(y_H-y_M)^2$

$\Leftrightarrow x^2+(\frac{1}{4}-y)^2 = 0^2+(-\frac{1}{4}-y)^2$

$\Leftrightarrow x^2+\cancel{y^2}-\frac{1}{2}y+\cancel{\frac{1}{16}} = \cancel{y^2}+\frac{1}{2}y+\cancel{\frac{1}{16}}$

$\Leftrightarrow \boxed{y=x^2}$ (2)

2) ⓐ M_k a pour abscisse k et appartient à P donc $\boxed{M_k(k;k^2)}$ (1)

H_k a la même abscisse que M_k et appartient à d donc $\boxed{H_k(k;-\frac{1}{4})}$ (1)

I_k est le milieu de $[FH_k]$ donc $\begin{cases} x_{I_k} = \frac{x_F+x_{H_k}}{2} = \frac{k}{2} \\ y_{I_k} = \frac{y_F+y_{H_k}}{2} = 0 \end{cases}$ donc $\boxed{I_k(\frac{k}{2};0)}$ (1)

ⓑ Equation de Δ_k : D'après les (H), le triangle FM_kH_k est isocèle en M_k donc la bissectrice Δ_k issue de M_k est aussi la médiane issue de M_k et passe donc par I_k

$N(x;y) \in \Delta_k \Leftrightarrow \overrightarrow{I_kN}(x-\frac{k}{2};y)$ est colinéaire à $\overrightarrow{I_kM_k}(\frac{k}{2};k^2)$

$\Leftrightarrow k^2(x-\frac{k}{2})-\frac{k}{2}\times y = 0$

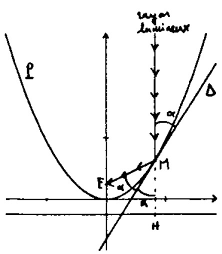
$\Leftrightarrow \frac{k}{2}(2kx-k^2-y)=0$

$\Leftrightarrow 2kx-k^2-y=0$ (par (H) $k \neq 0$)

$\Leftrightarrow \boxed{y=2kx-k^2}$ (3)

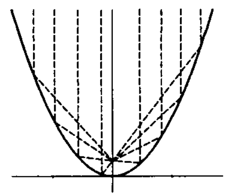
ⓒ Un carré étant toujours positif ou nul, on a pour tout x de $\mathbb{R}$: $(x-k)^2 \geq 0$ donc $x^2-2kx+k^2 \geq 0$ donc $x^2 \geq 2kx-k^2$ donc la droite Δ_k d'équation $y=2kx-k^2$ est toujours située en dessous de la parabole P d'équation $y=x^2$.

Dans le cas où $x=k$, alors $x^2=2kx-k^2$ et P touche donc Δ_k en M_k (2)



3) P et Δ sont quasiment confondus autour de M. donc on peut considérer que le rayon se réfléchit sur Δ. (cf figure de gauche). Si le rayon arrive en faisant un angle α avec Δ, il doit repartir en faisant également un angle de α avec Δ, c'est à dire vers F. (1)

4) Tous les rayons arrivant verticalement convergent donc vers le même point F après réflexion sur la parabole ! (cf figure de droite) (1)



2^{nde} Composition du 16 I 03 — Corrigé succinct

I)

$(S_1)\begin{cases}3x-2y=-5 & (1)\\ 7x+4y=23 & (2)\end{cases}$ $\begin{vmatrix}3 & -2\\ 7 & 4\end{vmatrix}=12+14=26\neq 0$ donc (S_1) admet un unique couple solution

$\iff \begin{cases}13x=13 & 2(1)+(2)\\ 2y=3x+5\end{cases}$

$\iff \begin{cases}x=1\\ y=4\end{cases}$

$\boxed{S=\{(1;4)\}}$ 3

$(S_2)\begin{cases}3(x-3)^2-\frac{2}{y-1}=-5\\ 7(x-3)^2+\frac{4}{y-1}=23\end{cases}$

pour tout x et tout $y\neq 1$, posons $X=(x-3)^2$ et $Y=\frac{1}{y-1}$ on retrouve alors le système (S_1).

or $(S_1)\iff\begin{cases}X=1\\ Y=4\end{cases}$ $(S_2)\iff\begin{cases}x-3=-1 \text{ ou } x-3=1\\ y-1=\frac{1}{4}\end{cases}$

donc $(S_2)\iff\begin{cases}(x-3)^2=1\\ \frac{1}{y-1}=4\end{cases}$ $\iff\begin{cases}x=2 \text{ ou } x=4\\ y=\frac{5}{4}\end{cases}$

Bilan : $\boxed{S=\left\{\left(2;\frac{5}{4}\right);\left(4;\frac{5}{4}\right)\right\}}$ 3

$(S_3)\begin{cases}\sqrt{3}x-\sqrt{2}y=2\sqrt{3} & (1)\\ -\frac{x}{\sqrt{2}}+\frac{y}{\sqrt{3}}=-\sqrt{2} & (2)\end{cases}$ $\begin{vmatrix}\sqrt{3} & -\sqrt{2}\\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\end{vmatrix}=1-1=0$

On en remarque que $(2)\times-\sqrt{6}=(1)$

les deux équations sont donc équivalentes !

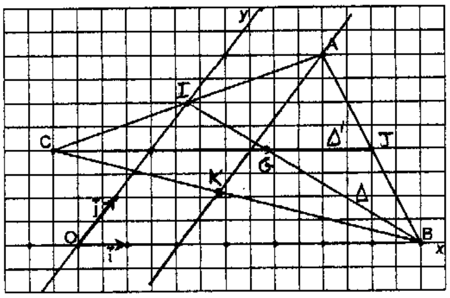
$(S_3)\iff\sqrt{3}x-\sqrt{2}y=2\sqrt{3}\iff x=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}y+2$

$\boxed{S=\left\{\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\,\alpha+2;\alpha\right)\right\}}$ avec α quelconque 3

II)

$\begin{cases}\vec{u}=2\vec{i}-3\vec{j} & (1)\\ \vec{v}=\vec{i}+6\vec{j} & (2)\end{cases}\iff\begin{cases}2\vec{u}+\vec{v}=5\vec{i} & 2(1)+(2)\\ \vec{u}-2\vec{v}=-15\vec{j} & (1)-2(2)\end{cases}\iff\boxed{\begin{cases}\vec{i}=\frac{2}{5}\vec{u}+\frac{1}{5}\vec{v}\\ \vec{j}=-\frac{1}{15}\vec{u}+\frac{2}{15}\vec{v}\end{cases}}$ 3

III)



1) On lit $\boxed{A(2;4)\ ;\ B(7;0)\ ;\ C(-2;2)}$ 2

2) $M(x;y)\in(BC)\iff\overrightarrow{BM}(x-7;y)$ est colinéaire à $\overrightarrow{BC}(-9;2)$

$\iff 2(x-7)+9y=0$

$\iff\boxed{y=-\frac{2}{9}x+\frac{14}{9}}$ 2

3) équation de Δ : Soit I le milieu de $[AC]$: $\begin{cases}\frac{x_A+x_C}{2}=0\\ \frac{y_A+y_C}{2}=3\end{cases}$ donc $I(0;3)$ 1

or (BI) étant confondue avec Δ, on a :

$M(x;y)\in\Delta\iff\overrightarrow{BM}(x-7;y)$ est colinéaire à $\overrightarrow{BI}(-7;3)$

$\iff 3(x-7)+7y=0$

$\iff\boxed{y=-\frac{3}{7}x+3}$ 2

équation de Δ' : Soit J le milieu de $[AB]$: $\begin{cases}\frac{x_A+x_B}{2}=\frac{9}{2}\\ \frac{y_A+y_B}{2}=2\end{cases}$ donc $J\left(\frac{9}{2};2\right)$ 1

or (CJ) est confondue avec Δ'.

On remarque que $y_J=y_C=2$ donc Δ' est horizontale et a pour équation $\boxed{y=2}$ 2

4) G est le centre de gravité $\iff\begin{cases}G\in\Delta\\ G\in\Delta'\end{cases}\iff\begin{cases}y_G=-\frac{3}{7}x_G+3\\ y_G=2\end{cases}\iff\begin{cases}x_G=\frac{7}{3}\\ y_G=2\end{cases}$

donc $\boxed{G\left(\frac{7}{3};2\right)}$ 2

5) (AK) est parallèle à l'axe des ordonnées. Elle a donc pour équation $x=x_A$ soit $\boxed{x=2}$ 2

6) K est l'intersection de (BC) et (AK) : $\begin{cases}K\in(BC)\\ K\in(AK)\end{cases}\iff\begin{cases}y_K=-\frac{2}{9}x_K+\frac{14}{9}\\ x_K=2\end{cases}\iff\begin{cases}x_K=2\\ y_K=-\frac{4}{9}+\frac{14}{9}\end{cases}\iff\begin{cases}x_K=2\\ y_K=\frac{10}{9}\end{cases}$ donc $\boxed{K\left(2;\frac{10}{9}\right)}$ 2

IV)

1) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OI}+\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{OI}+\overrightarrow{IB}$

$=2\overrightarrow{OI}+(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB})$

$=\boxed{2\overrightarrow{OI}}$ (car par (H) I est le milieu de $[AB]$) 2

$\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OJ}+\overrightarrow{JC}+\overrightarrow{OJ}+\overrightarrow{JD}$

$=2\overrightarrow{OJ}+(\overrightarrow{JC}+\overrightarrow{JD})$

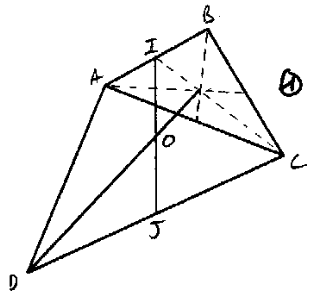
$=\boxed{2\overrightarrow{OJ}}$ (car par (H) J est le milieu de $[CD]$)

par (H) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\vec{0}$ donc $2\overrightarrow{OI}+2\overrightarrow{OJ}=\vec{0}$ donc $\overrightarrow{OI}+\overrightarrow{OJ}=\vec{0}$ donc $\boxed{O \text{ est le milieu de } [IJ]}$ 1

2) par (H) $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$

donc $\overrightarrow{GO}+\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{GO}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{GO}+\overrightarrow{OC}=\vec{0}$

donc $\boxed{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=3\overrightarrow{OG}}$ 2



3) par (H) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\vec{0}$

donc $3\overrightarrow{OG}+\overrightarrow{OD}=\vec{0}$ (cf 2)

donc $\overrightarrow{OD}=3\overrightarrow{GO}$

donc $\overrightarrow{OD}$ est colinéaire à $\overrightarrow{GO}$

donc $\boxed{O, D \text{ et } G \text{ sont alignés}}$ 2

V)

Appelons E l'ensemble des points dont les coordonnées vérifient $(x-y)^2=4(x+y)^2$

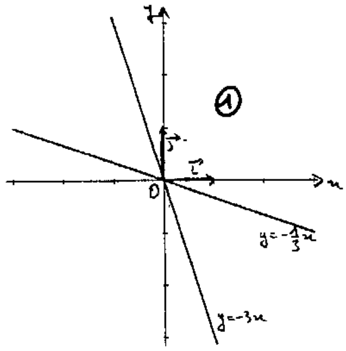
$M(x;y)\in E\iff(x-y)^2=4(x+y)^2$

$\iff x-y=2(x+y)$ ou $x-y=-2(x+y)$

$\iff x-y=2x+2y$ ou $x-y=-2x-2y$

$\iff 3y=-x$ ou $y=-3x$

$\iff y=-\frac{1}{3}x$ ou $y=-3x$ 1,5



Bilan E est la réunion de 2 droites d'équations respectives $y=-\frac{1}{3}x$ et $y=-3x$ 1,5