2k DS du 4II08 1h Corrigé succinct

$f : x \mapsto \dfrac{-x^2+1}{x^2+1}$

1) Domaine de définition :

$x \in D_f \Leftrightarrow x^2+1 \neq 0 \Leftrightarrow x^2 \neq -1$ or un carré ne peut être négatif donc $\boxed{D_f = \mathbb{R}}$ ①

2) Montrer que : $f(x) > -1$:

Pour tout x de $\mathbb{R}$, $f(x)+1 = \dfrac{-x^2+1}{x^2+1} + 1 = \dfrac{-x^2+1+x^2+1}{x^2+1} = \dfrac{2}{x^2+1}$

or un carré est toujours positif donc $x^2+1>0$ donc $\dfrac{2}{x^2+1} > 0$ donc $f(x)+1>0$ donc $\boxed{f(x) > -1}$ ②

$\boxed{\text{-1 n'est pas un minimum de } f \text{ car il n'est jamais atteint !}}$ ①

3) Extremum de f en 0 :

Pour tout x de $\mathbb{R}$, déterminons le signe de $f(x) - f(0)$:

$f(x) - f(0) = \dfrac{-x^2+1}{x^2+1} - 1 = \dfrac{-x^2+1-x^2-1}{x^2+1} = \dfrac{-2x^2}{x^2+1}$

or un carré est toujours positif donc $-2x^2 \leq 0$ et $x^2+1>0$ donc $f(x)-f(0) \leq 0$ donc $f(x) \leq f(0)$ avec $f(0) = 1$

donc $\boxed{f \text{ admet un maximum de 1 en 0 sur } \mathbb{R}}$ ②

4) Parité :

Pour tout x de $\mathbb{R}$, $-x$ appartient aussi à $\mathbb{R}$ et $f(-x) = \dfrac{-(-x)^2+1}{(-x)^2+1} = \dfrac{-x^2+1}{x^2+1} = f(x)$ donc $\boxed{f \text{ est paire}}$ ②

5) Variation sur $\mathbb{R}^-$:

Pour tous x_1, x_2 tels que $x_1 < x_2 \leq 0$

déterminons le signe de $f(x_1) - f(x_2)$:

$f(x_1) - f(x_2) = \dfrac{-x_1^2+1}{x_1^2+1} - \dfrac{-x_2^2+1}{x_2^2+1}$

$= \dfrac{(-x_1^2+1)(x_2^2+1) - (-x_2^2+1)(x_1^2+1)}{(x_1^2+1)(x_2^2+1)}$

$= \dfrac{\cancel{-x_1^2x_2^2} + x_2^2 - x_1^2 + \cancel{1} + \cancel{x_1^2x_2^2} - x_1^2 + x_2^2 - \cancel{1}}{(x_1^2+1)(x_2^2+1)}$

$= \dfrac{2(x_2-x_1)(x_1+x_2)}{(x_1^2+1)(x_2^2+1)}$

or par (H) $x_1 < x_2$ donc $x_2 - x_1 > 0$

$x_1 < 0$ et $x_2 \leq 0$ donc $x_1 + x_2 < 0$

un carré est toujours positif donc $x_1^2+1>0$ et $x_2^2+1>0$

Bilan : $f(x_1) - f(x_2) < 0$ donc $f(x_1) < f(x_2)$

donc $\boxed{f \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}^-}$ ③

f étant paire $\boxed{\text{elle est donc aussi décroissante sur } \mathbb{R}^+}$ (0,5)

6) Tableau de variations :

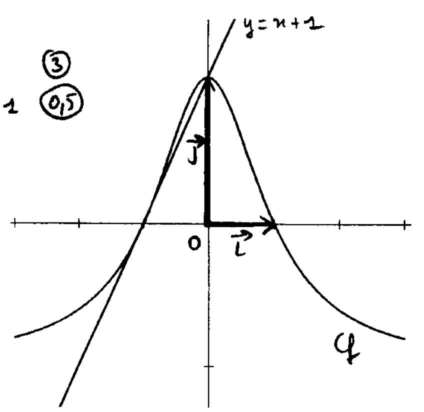
x	$-\infty$	0	$+\infty$
f	↗	1	↘

①

7) Représentation graphique :

$\mathcal{C}$ ③

$y = x+1$ (0,5)



8) Résoudre graphiquement $f(x) \leq x+1$:

les solutions sont les abscisses des points de $\mathcal{C}$ situés au dessous de la droite d'équation $y = x+1$.

$\boxed{S = \{-1\} \cup \mathbb{R}^+}$ ②

9) Résoudre $f(x) > 0$:

(I) : $f(x) > 0$ (pas de valeurs interdites)

(I) $\Leftrightarrow \dfrac{(1-x)(1+x)}{x^2+1} > 0$

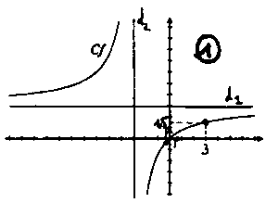
(I) $\Leftrightarrow (1-x)(1+x) > 0$ (car $x^2+1>0$)

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$1-x$		+		+	0	−	
$1+x$		−	0	+		+	
$f(x)$		−	0	+	0	−	

$\boxed{S =]-1 ; 1[}$ ②

2de Composition du 12I06 2h Corrigé succinct

I) Première partie



1) Tous les réels ont une image par f sauf -3 qui annule le dénominateur de $f(x)$. Donc $\boxed{D_f = \mathbb{R} - \{-3\}}$ 1 1

2) $f(3) = \frac{3\times3}{3+3} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$ l'image de 3 est donc $\boxed{3/2}$ 1

3) Résolvons $f(x) = 3$ (condition : $x \in D_f$)
$f(x) = 3 \iff \frac{3x}{x+3} = 3 \iff 3x = 3x+9 \iff 0x = 9$ donc $S = \emptyset$
$\boxed{\text{3 n'a donc aucun antécédent par } f}$ 2

4) ⓑ L'image de 3 est l'ordonnée du point de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse 3 : $f(3) = 1{,}5$ 1
$\mathcal{C}_f$ et d_1 n'ont pas d'intersection donc 3 n'a pas d'antécédent par f 1

5) Pour tout x de D_f, $f(x) - 3 = \frac{3x}{x+3} - 3 = \frac{3x-3x-9}{x+3} = -\frac{9}{x+3}$
Il y a donc deux cas : si $x < -3$ alors $x+3 < 0$ donc $f(x) - 3 > 0$ donc $f(x) > 3$
donc à gauche de d_2, $\mathcal{C}_f$ est strictement au dessus de d_1 2
si $x > -3$ alors $x+3 > 0$ donc $f(x) - 3 < 0$ donc $f(x) < 3$
donc à droite de d_2, $\mathcal{C}_f$ est strictement au dessous de d_1 2

Deuxième partie

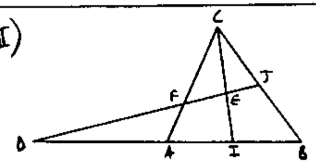
6) x est la résistance d'un conducteur ohmique donc $x \in \mathbb{R}^{+*}$ donc $\boxed{D_g = \mathbb{R}^{+*}}$ 1
(Remarque $x \neq 0$ car un conducteur ohmique ne peut avoir une résistance complètement nulle.)

7) $\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{1}{x} + \frac{1}{3}$ ($x \neq 0$!)
donc $R_{eq} = \frac{1}{\frac{1}{x}+\frac{1}{3}} = \frac{1}{\frac{3+x}{3x}} = \frac{3x}{x+3}$. Bilan pour tout x de D_g, $\boxed{g(x) = R_{eq} = f(x)}$ 2

8) ⓐ Si $x = 2\,\Omega$, $R_{eq} = g(2) = \frac{3\times2}{2+3} = \frac{6}{5} = \boxed{1{,}2\,\Omega}$ 1
ⓑ Si $R_{eq} = 1\,\Omega$, résolvons $g(x) = 1$: (condition $x \in D_g$)
$g(x) = 1 \iff \frac{3x}{x+3} = 1 \iff 3x = x+3 \iff 2x = 3 \iff \boxed{x = 1{,}5\,\Omega}$ 2

9) D'après 5) si $x > -3$ alors $f(x) < 3$ donc si $x > 0$ alors $g(x) < 3$
donc R_{eq} ne peut dépasser $3\,\Omega$. $\boxed{\text{On ne peut avoir } R_{eq} = 4\,\Omega}$ 1,5
Par contre, d'après $\mathcal{C}_f$, plus x est important, plus $\mathcal{C}_f$ se rapproche de d_1, plus $\boxed{R_{eq} \text{ se rapproche de } 3\,\Omega}$ 1,5

II)



1) Par ⓗ, le triangle ABC n'est pas aplati donc $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires et forment donc une base du plan.
Donc $(A ; \overrightarrow{AB} ; \overrightarrow{AC})$ est un repère. 2

2) A est l'origine donc $\boxed{A(0;0)}$ 1
$\overrightarrow{AB} = 1\overrightarrow{AB} + 0\overrightarrow{AC}$ donc $\boxed{B(1;0)}$ 1
$\overrightarrow{AC} = 0\overrightarrow{AB} + 1\overrightarrow{AC}$ donc $\boxed{C(0;1)}$ 1
par ⓗ $\overrightarrow{AD} = -\overrightarrow{AB} = -1\overrightarrow{AB} + 0\overrightarrow{AC}$ donc $\boxed{D(-1;0)}$ 1
par ⓗ I est le milieu de $[AB]$ donc $\begin{cases} x_I = \frac{x_A+x_B}{2} = \frac{1}{2} \\ y_I = \frac{y_A+y_B}{2} = 0 \end{cases}$ $\boxed{I\left(\frac{1}{2};0\right)}$ 1
par ⓗ J est le milieu de $[CB]$ donc $\begin{cases} x_J = \frac{x_C+x_B}{2} = \frac{1}{2} \\ y_J = \frac{y_C+y_B}{2} = \frac{1}{2} \end{cases}$ $\boxed{J\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)}$ 1

3) ⓐ par ⓗ $\overrightarrow{CE} = m\overrightarrow{CI}$
donc $\begin{cases} x_E - x_C = m(x_I - x_C) \\ y_E - y_C = m(y_I - y_C) \end{cases}$ donc $\begin{cases} x_E = x_C + m(x_I - x_C) \\ y_E = y_C + m(y_I - y_C) \end{cases}$ donc $\begin{cases} x_E = \frac{1}{2}m \\ y_E = 1-m \end{cases}$ $\boxed{E\left(\frac{1}{2}m ; 1-m\right)}$ 3

ⓑ par ⓗ J, E et D sont alignés
donc $\overrightarrow{JE}\left(\frac{m-1}{2} ; \frac{1-2m}{2}\right)$ et $\overrightarrow{JD}\left(-\frac{3}{2} ; -\frac{1}{2}\right)$ sont colinéaires
donc $x_{\overrightarrow{JE}}\, y_{\overrightarrow{JD}} - x_{\overrightarrow{JD}}\, y_{\overrightarrow{JE}} = 0$ | donc $1 - m + 3(1-2m) = 0$
donc $-\frac{1}{2}\left(\frac{m-1}{2}\right) + \frac{3}{2}\left(\frac{1-2m}{2}\right) = 0$ | donc $\boxed{m = \frac{4}{7}}$ 2

4) de même par ⓗ $\overrightarrow{CF} = n\overrightarrow{CA}$
donc $\begin{cases} x_F - x_C = n(x_A - x_C) \\ y_F - y_C = n(y_A - y_C) \end{cases}$ donc $\begin{cases} x_F = 0 \\ y_F = 1-n \end{cases}$ $\boxed{F(0;1-n)}$ 3
de plus par ⓗ J, F et D sont alignés
donc $\overrightarrow{JF}\left(-\frac{1}{2} ; \frac{1-2n}{2}\right)$ et $\overrightarrow{JD}\left(-\frac{3}{2} ; -\frac{1}{2}\right)$ sont colinéaires
donc $\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{3}{2}\left(\frac{1-2n}{2}\right) = 0$ | donc $-6n + 4 = 0$
donc $1 + 3(1-2n) = 0$ | donc $\boxed{n = \frac{2}{3}}$ 2

5) D'après 3) $E\left(\frac{1}{2}m ; 1-m\right)$ et $m = \frac{4}{7}$ donc $\boxed{E\left(\frac{2}{7};\frac{3}{7}\right)}$
D'après 4) $F(0;1-n)$ et $n = \frac{2}{3}$ donc $\boxed{F\left(0;\frac{1}{3}\right)}$ 2

2^{nde} Composition du 25 I 05 Corrigé succinct

I) 1) Un carré est toujours positif ou nul donc pour tout x de $\mathbb{R}$, $x^2+1 \neq 0$ donc $\boxed{D_f = \mathbb{R}}$ (0,5)

2) extremum en 0 :
Pour tout x de $\mathbb{R}$, déterminons le signe de $f(x) - f(0)$:

$f(x) - f(0) = \frac{2}{1+x^2} - \frac{2}{1+0} = \frac{2}{1+x^2} - 2$
$= \frac{2 - 2(1+x^2)}{1+x^2} = -\frac{2x^2}{1+x^2}$

or un carré est toujours positif ou nul
donc $2x^2 \geq 0$ et $1+x^2 > 0$
donc $-\frac{2x^2}{1+x^2} \leq 0$ donc $f(x) \leq f(0)$

(avec $f(0) = 2$) (2)

donc $\boxed{f \text{ admet un maximum de 2 en 0 sur } \mathbb{R}}$

3) parité
pour tout x de $\mathbb{R}$, $-x$ appartient aussi à $\mathbb{R}$
et $f(-x) = \frac{2}{1+(-x)^2} = \frac{2}{1+x^2} = f(x)$
donc $\boxed{f \text{ est paire}}$ (1)

4) variations sur $\mathbb{R}^+$
Pour tous x_1, x_2 tels que $0 \leq x_1 < x_2$
déterminons le signe de $f(x_1) - f(x_2)$:

$f(x_1) - f(x_2) = \frac{2}{1+x_1^2} - \frac{2}{1+x_2^2} = 2\frac{(1+x_2^2 - 1 - x_1^2)}{(1+x_1^2)(1+x_2^2)}$
$= \frac{2(x_2-x_1)(x_1+x_2)}{(1+x_1^2)(1+x_2^2)}$

or par (H) $x_1 < x_2$ donc $x_2 - x_1 > 0$
$x_1 \geq 0$ et $x_2 > 0$ donc $x_1 + x_2 > 0$
un carré est tj positif donc $1+x_1^2 > 0$ et $1+x_2^2 > 0$

Bilan $f(x_1) - f(x_2) > 0$ donc $f(x_1) > f(x_2)$
donc $\boxed{f \text{ est strictement décroissante sur } \mathbb{R}^+}$ (3)

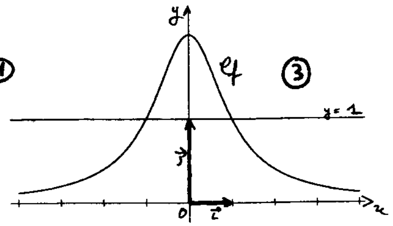
tableau de variations
f étant paire, on en déduit ses variations sur $\mathbb{R}$ tout entier

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f	$\nearrow$	2	$\searrow$

(0,5)

5) a) Un carré étant toujours positif, on a pour tout x de $\mathbb{R}$:
$x^2 \geq 0$ donc $1+x^2 > 0$ donc $\frac{2}{1+x^2} > 0$ donc $\boxed{f(x) > 0}$ (1)

b) D'après 2) et 5)a), on a : $\boxed{0 < f(x) \leq 2}$ (0,5)



(3)

6)

x	0	0,25	0,5	1	1,5	2	3	4
$f(x)$	2	1,9	1,6	1	0,6	0,4	0,2	0,12

(0,5)

7) a) les solutions sont les abscisses des points de C_f situés au dessus de la droite d'équation $y = 1$ (intersection non-comprises) $\boxed{S =]-1\,;1[}$ (1,5)

b) Résolvons $f(x) > 1$ (condition : $D_f = \mathbb{R}$ donc pas de valeurs interdites)
$\Leftrightarrow \frac{2}{1+x^2} > 1$
$\Leftrightarrow 2 > 1 + x^2$ $(1+x^2 > 0)$
$\Leftrightarrow x^2 < 1$
$\Leftrightarrow x^2 - 1 < 0$
$\Leftrightarrow (x-1)(x+1) < 0$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
produit		$+$	0	$-$	0	$+$	

donc $\boxed{S =]-1\,;1[}$ (2,5)

II) 1) (S) admet un unique couple solution $\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 6a & 2 \\ 3 & a \end{vmatrix} \neq 0 \Leftrightarrow 6a^2 - 6 \neq 0 \Leftrightarrow 6(a-1)(a+1) \neq 0$
$\Leftrightarrow \boxed{a \neq 1 \text{ et } a \neq -1}$ (2)

Résolvons (S) dans le cas ci-dessus :

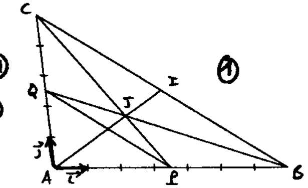
$\begin{cases} 6a\,x + 2y = 2 & (1) \\ 3x + ay = 1 & (2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2-2a^2)y = 2-2a & (1) - 2a(2) \\ x = \frac{1-ay}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cancel{2}(1-a)(1+a)y = \cancel{2}(1-a) & (a \neq 1) \\ x = \frac{1-ay}{3} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{1+a} & (a \neq -1) \\ x = \frac{1 - a\left(\frac{1}{1+a}\right)}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1+a-a}{3(1+a)} \\ y = \frac{1}{1+a} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{3(1+a)} \\ y = \frac{1}{1+a} \end{cases}$ $\boxed{S = \left\{\left(\frac{1}{3(1+a)}\,;\frac{1}{1+a}\right)\right\}}$ (2)

2) Si $a = -1$ (S) s'écrit $\begin{cases} 6x + 2y = 2 \\ 3x - y = 1 \end{cases}$ On remarque que $(0;1)$ est solution de la 1ère équation et non de la seconde : les deux équations sont incompatibles $\boxed{S = \emptyset}$ (2)

Si $a = 1$ (S) s'écrit $\begin{cases} 6x + 2y = 2 & (1) \\ 3x + y = 1 & (2) \end{cases}$ les deux équations sont équivalentes $2\times(2) = (1)$
donc (S) $\Leftrightarrow 3x + y = 1 \Leftrightarrow y = 1 - 3x$
$\boxed{S = \{(\alpha\,;1-3\alpha)\} \text{ avec } \alpha \text{ réel quelconque}}$ (2)

III) 1) $\boxed{A(0;0) \quad B(7;0) \quad C(0;5) \quad I\left(\frac{7}{2};\frac{5}{2}\right)}$ (2)



(1)

2) a) par (H) $J \in [AI]$ donc $AA \leq AJ \leq AI$ donc $\boxed{k \in [0;1]}$ (1)
b) par (H) $\vec{AJ} = k\vec{AI}$ donc $\begin{cases} x_J = k\,x_I \\ y_J = k\,y_I \end{cases}$ donc $\boxed{J\left(\frac{7k}{2};\frac{5k}{2}\right)}$ (2)

3) Coordonnées de P
$\begin{cases} P \in (JC) \\ P \in (AB) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{CP}(x_P\,;y_P - 5) \text{ est colinéaire à } \vec{CJ}\left(\frac{7k}{2};\frac{5k}{2}-5\right) \\ y_P = 0 \end{cases}$
$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(\frac{5k}{2}-5\right)x_P - \frac{7k}{2}(-5) = 0 \\ y_P = 0 \end{cases}$
. . . . . . (d'après (b) $k \neq 2$)
$\Leftrightarrow \begin{cases} x_P = -\frac{7k}{k-2} \\ y_P = 0 \end{cases}$ $\boxed{P\left(\frac{7k}{2-k};0\right)}$ (2)

Coordonnées de Q
$\begin{cases} Q \in (AC) \\ Q \in (BJ) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_Q = 0 \\ \vec{BQ}(x_Q - 7\,;y_Q) \text{ est colinéaire à } \vec{BJ}\left(\frac{7k}{2}-7\,;\frac{5k}{2}\right) \end{cases}$
$\Leftrightarrow \begin{cases} x_Q = 0 \\ \frac{5k}{2}(-7) - \left(\frac{7k}{2}-7\right)y_Q = 0 \end{cases}$
. . . . . . (d'après (b) $k \neq 2$)
$\Leftrightarrow \begin{cases} x_Q = 0 \\ y_Q = \frac{-5k}{k-2} \end{cases}$ $\boxed{Q\left(0;\frac{5k}{2-k}\right)}$ (2)

4) Equation de (BC)
Soit $M(x;y)$ un point quelconque :
$M \in (BC) \Leftrightarrow \vec{BM}(x-7;y)$ est colinéaire à $\vec{BC}(-7;5)$
$\Leftrightarrow 5(x-7) + 7y = 0$
$\Leftrightarrow \boxed{y = -\frac{5}{7}x + 5}$ (2)

Equation de (PQ)
$M \in (PQ) \Leftrightarrow \vec{PM}\left(x - \frac{7k}{2-k};y\right)$ est colinéaire à $\vec{PQ}\left(-\frac{7k}{2-k};\frac{5k}{2-k}\right)$
$\Leftrightarrow \left(\frac{5k}{2-k}\right)\left(x - \frac{7k}{2-k}\right) + \left(\frac{7k}{2-k}\right)y = 0$ $\times(2-k)$
$\Leftrightarrow 5kx - \frac{35k^2}{2-k} + 7ky = 0$ $\div k$ $(k \neq 0)$
$\Leftrightarrow 5x - \frac{35k}{2-k} + 7y = 0$
$\Leftrightarrow \boxed{y = -\frac{5}{7}x + \frac{5k}{2-k}}$ (2)

On remarque que les deux droites (BC) et (PQ) ont le même coefficient directeur $-\frac{5}{7}$ indépendant de k.
Donc quand J se déplace sur [AI], $\boxed{\text{la droite (PQ) reste parallèle à (BC)}}$ (1)

5) P milieu de [AB] $\Leftrightarrow \begin{cases} x_P = \frac{x_A + x_B}{2} \\ y_P = \frac{y_A + y_B}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{7k}{2-k} = \frac{7}{2} \\ 0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow k = \frac{2}{3}$

Q milieu de [AC] $\Leftrightarrow \begin{cases} x_Q = \frac{x_A + x_C}{2} \\ y_Q = \frac{y_A + y_C}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = 0 \\ \frac{5k}{2-k} = \frac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow k = \frac{2}{3}$

donc P et Q sont les milieux de [AB] et [AC] $\Leftrightarrow$ $\boxed{k = \frac{2}{3}}$ (1)

Distance PQ : Attention le repère $(A;\vec{i};\vec{j})$ n'est pas orthonormé !
P et Q sont les milieux de [AB] et [AC] donc d'après le théorème de la droite des milieux dans le triangle ABC, on a : $PQ = \frac{1}{2}BC = \frac{9}{2} = \boxed{4{,}5 \text{ cm}}$ (2)

2^{DJ} DS du 17 I 02 $\quad 2^4 \quad$ Corrigé succinct

I) 1) $\dfrac{x^2+2x+1}{x^2-1}=0$ valeurs interdites $x^2-1\neq 0 \Leftrightarrow \boxed{x\neq -1 \text{ et } x\neq 1}$

$\Leftrightarrow \dfrac{(x+1)^2}{x^2-1}=0$

$\Leftrightarrow (x+1)^2=0$ (si $B\neq 0$ alors $\frac{A}{B}=0 \Leftrightarrow A=0$)

$\Leftrightarrow x+1=0$ ($AB=0 \Leftrightarrow A=0$ ou $B=0$)

$\Leftrightarrow x=-1$ or -1 est une valeur interdite

donc $\boxed{S=\varnothing}$ (3)

2) $\dfrac{5+12x}{3-2x}>0$ valeurs interdites $3-2x\neq 0 \Leftrightarrow \boxed{x\neq \frac{3}{2}}$

x	$-\infty$		$-\frac{5}{12}$		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$5+12x$		$-$	0	$+$		$+$	
$3-2x$		$+$		$+$	0	$-$	
Quot		$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	

$\boxed{S=\left]-\frac{5}{12}\,;\,\frac{3}{2}\right[}$ (3)

3) $x-3+\dfrac{4}{x+2}=0$ valeur interdite $x+2\neq 0 \Leftrightarrow \boxed{x\neq -2}$

$\Leftrightarrow \dfrac{(x-3)(x+2)+4}{x+2}=0$

$\Leftrightarrow (x-3)(x+2)+4=0$ (si $B\neq 0$ alors $\frac{A}{B}=0 \Leftrightarrow A=0$)

$\Leftrightarrow x^2-x-2=0$

$\Leftrightarrow \left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}-\frac{8}{4}=0$

$\Leftrightarrow \left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{3}{2}\right)^2=0$

$\Leftrightarrow (x-2)(x+1)=0$

$\Leftrightarrow x=2$ ou $x=-1$ ($AB=0 \Leftrightarrow A=0$ ou $B=0$)

$\boxed{S=\{-1\,;\,2\}}$ (3)

4) $\dfrac{x^2+x-5}{x^2+2}<-1$

valeurs interdites : un carré est toujours positif donc x^2+1 est toujours strictement positif. Il n'y a donc pas de valeurs interdites

$\Leftrightarrow x^2+x-5<-(x^2+2)$

On a multiplié les deux termes de l'inéquation par x^2+2 qui est positif, le sens de l'inégalité ne change donc pas.

$\Leftrightarrow 2x^2+x-3<0$

$\Leftrightarrow 2\left(x^2+\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}\right)<0$

$\Leftrightarrow x^2+\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}<0$

$\Leftrightarrow \left(x+\frac{1}{4}\right)^2-\frac{1}{16}-\frac{24}{16}<0$

$\Leftrightarrow \left(x+\frac{1}{4}\right)^2-\left(\frac{5}{4}\right)^2<0$

$\Leftrightarrow (x-1)\left(x+\frac{3}{2}\right)<0$

x	$-\infty$		$-\frac{3}{2}$		1		$+\infty$
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+\frac{3}{2}$		$-$	0	$+$		$+$	
produit		$+$	0	$-$	0	$+$	

$\boxed{S=\left]-\frac{3}{2}\,;\,1\right[}$ (3)

II 1) variation sur $]-\infty\,;-1[$

pour tous x_1, x_2 tels que $x_1<x_2<-1$

déterminons le signe de $f(x_1)-f(x_2)$:

$f(x_1)-f(x_2)=\dfrac{3x_1+5}{2x_1+2}-\dfrac{3x_2+5}{2x_2+2}=\dots=\boxed{\dfrac{x_2-x_1}{(x_1+1)(x_2+1)}}$ (3)

or par (H) $x_1<x_2$ donc $x_2-x_1>0$; $x_1<-1$ donc $x_1+1<0$; $x_2<-1$ donc $x_2+1<0$ — Bilan $f(x_1)-f(x_2)>0$, f est st $\searrow$ sur $]-\infty\,;-1[$ (1,5)

variation sur $]-1\,;+\infty[$

pour tous x_1, x_2 tels que $-1<x_1<x_2$

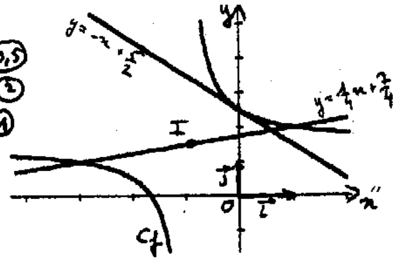
déterminons le signe de $f(x_1)-f(x_2)$: (1,5)

par (H) $x_1<x_2$ donc $x_2-x_1>0$; $x_1>-1$ donc $x_1+1>0$; $x_2>-1$ donc $x_2+1>0$ — Bilan $f(x_1)-f(x_2)>0$, f est st $\searrow$ sur $]-1\,;+\infty[$

(0,5)

3) les solutions de l'équation sont les abscisses des pts d'intersection de C_f avec la droite d'équation $y=\frac{1}{4}x+\frac{7}{4}$ $\quad\boxed{S=\{-3\,;\,1\}}$ (2)

R (0,5)
Cf (2)
D (1)



4) $f(x)\leq -x+\frac{5}{2}$ valeurs interdites : $2x+2\neq 0 \Leftrightarrow \boxed{x\neq -1}$

$\Leftrightarrow \dfrac{3x+5}{2x+2}\leq -x+\dfrac{5}{2}$

$\Leftrightarrow \dfrac{3x+5+2x(x+1)-5(x+1)}{2(x+1)}\leq 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{2x^2}{2(x+1)}\leq 0 \Leftrightarrow \dfrac{x^2}{x+1}\leq 0$

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
x^2		$+$		$+$	0	$+$	
$x+1$		$-$		$+$		$+$	
Quotient		$-$	$\Vert$	$+$	0	$+$	

$\boxed{S=]-\infty\,;-1[\,\cup\{0\}}$ (3)

les solutions de l'éq sont les abscisses des points de C_f situés en dessous de la droite d'éq $y=-x+\frac{5}{2}$ (2) $\boxed{S=]-\infty\,;-1[\,\cup\{0\}}$

1) M' est le symétrique de M par rapport à I

$\Rightarrow \overrightarrow{IM'}=-\overrightarrow{IM} \Leftrightarrow \begin{cases} x'-x_I=-(x-x_I)\\ y'-y_I=-(y-y_I)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x'=2x_I-x\\ y'=2y_I-y\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2x_I-x'\\ y'=2y_I-y\end{cases} \Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} x=-2-x'\\ y'=3-y\end{cases}}$ (3)

2) $M\in C_f \Leftrightarrow y=f(x)$ donc d'après 1) on a :

$\boxed{y'}=3-y=3-f(x)=3-\dfrac{3x+5}{2x+2}=\dfrac{6x+6-3x-5}{2x+2}=\dfrac{3x+1}{2x+2}=\dfrac{3(-2-x')+1}{2(-2-x')+2}=\dfrac{-6-3x'+1}{-4-2x'+2}=\dfrac{3x'+5}{2x'+2}=\boxed{f(x')}$ (3)

donc $\boxed{M'\in C_f}$ (0,5) On vient donc de montrer que I était un centre de symétrie de C_f (0,5)

III Pour chaque martien, il y a 3 possibilités pour les couleurs, 4 pour les mains, 18 pour les antennes. Il y a donc (1) $3\times 4\times 18=216$ sortes de martiens différents ! (1)

Pour être sûr d'avoir en main 2 martiens identiques, il faut donc sélectionner $216+1$ martiens

———————— 3 ———————— $216\times 2+1$ ——

———————— 4 ———————— $216\times 3+1$ ——

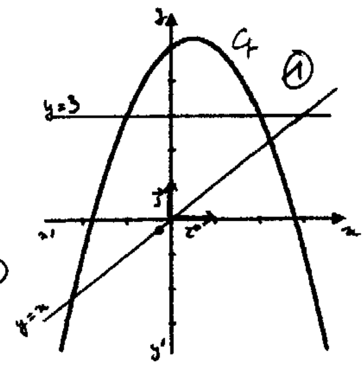
———————— 11 ———————— $216\times 10+1$ ——

Il faut donc sélectionner $\boxed{2161 \text{ martiens}}$ pour être sûr d'en avoir 11 identiques dans l'équipe de space foot.

(2)

2DJ DS du 6 XII 01 2h Corrigé succinct

I 1) Le point haut de la courbe semble avoir pour abscisse $\frac{1}{2}$ donc f admet probablement un maximum en $\boxed{x = \frac{1}{2}}$ sur $\mathbb{R}$. ①



2) pour tout x de $\mathbb{R}$, déterminons le signe de $f(x) - f(\frac{1}{2})$

$f(x) - f(\frac{1}{2}) = -x^2 + x + 5 - \left(-(\frac{1}{2})^2 + \frac{1}{2} + 5\right) = \dots = -(x - \frac{1}{2})^2$ ②

or un carré est toujours positif ou nul donc $f(x) - f(\frac{1}{2}) \leq 0$ donc $f(x) \leq f(\frac{1}{2})$

avec $f(\frac{1}{2}) = \frac{21}{4}$ donc $\boxed{f \text{ admet un maximum de } \frac{21}{4} \text{ en } \frac{1}{2} \text{ sur } \mathbb{R}}$ ②

3) d'après 2) pour tout x de $\mathbb{R}$, $f(x) \leq \frac{21}{4}$ donc $f(x) < 6$ donc $\boxed{S = \mathbb{R}\,!}$ ①

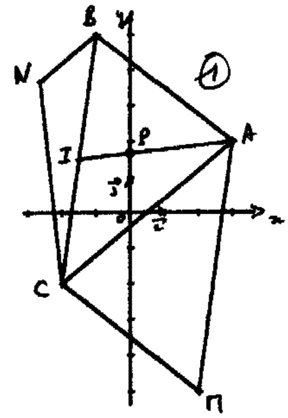
4) ⓐ les solutions de l'équation $f(x) = 0$ sont les abscisses des pts d'intersection de C_f avec $(x'x)$: $\boxed{S = \{\alpha ; \beta\} \text{ avec } \alpha \approx -1{,}8 \text{ et } \beta \approx 2{,}8}$ ②

ⓑ les solutions de l'inéq $f(x) \geq 3$ sont les abscisses des pts de C_f situés au dessus de la droite d'éq $y = 3$: $\boxed{S = [-1 ; 2]}$ ②

ⓒ les solutions de l'éq $f(x) = x$ sont les abscisses des pts d'intersection de C_f avec la droite d'éq $y = x$

$\boxed{S = \{\gamma ; \delta\} \text{ avec } \gamma \approx -2{,}2 \text{ et } \delta \approx 2{,}2}$ ②

II 1) $\vec{AM} = \vec{BC} \iff \begin{cases} x_M - x_A = x_C - x_B \\ y_M - y_A = y_C - y_B \end{cases} \iff \begin{cases} x_M = 3 - 2 + 1 = 2 \\ y_M = 2 - 2 - 5 = -5 \end{cases}$ $\boxed{M(2 ; -5)}$ ②



$\vec{BN} = \frac{1}{3}\vec{AC} \iff \begin{cases} x_N - x_B = \frac{1}{3}(x_C - x_A) \\ y_N - y_B = \frac{1}{3}(y_C - y_A) \end{cases} \iff \begin{cases} x_N = -1 + \frac{1}{3}(-2-3) = -\frac{8}{3} \\ y_N = 5 + \frac{1}{3}(-2-2) = \frac{11}{3} \end{cases}$ $\boxed{N(-\frac{8}{3} ; \frac{11}{3})}$ ②

$\vec{PA} + \vec{PB} + \vec{PC} = \vec{0} \iff \begin{cases} x_A - x_P + x_B - x_P + x_C - x_P = 0 \\ y_A - y_P + y_B - y_P + y_C - y_P = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x_P = \frac{x_A + x_B + x_C}{3} = 0 \\ y_P = \frac{y_A + y_B + y_C}{3} = \frac{5}{3} \end{cases}$ $\boxed{P(0 ; \frac{5}{3})}$ ②

2) par (H) $\vec{AM} = \vec{BC}$ donc $\boxed{AMCB \text{ est un parallélogramme}}$ ①

par (H) $\vec{BN} = \frac{1}{3}\vec{AC}$ donc $\vec{BN}$ est colinéaire à $\vec{AC}$ donc (BN) est parallèle à (AC)

donc $\boxed{BNCA \text{ est un trapèze}}$ de bases [BN] et [AC] ②

3) $\begin{cases} x_I = \frac{x_B + x_C}{2} = -\frac{3}{2} \\ y_I = \frac{y_B + y_C}{2} = \frac{3}{2} \end{cases}$ $\boxed{I(-\frac{3}{2} ; \frac{3}{2})}$ ①

$\begin{cases} x_{\vec{AP}} = x_P - x_A = -3 \\ y_{\vec{AP}} = y_P - y_A = -\frac{1}{3} \end{cases}$ et $\begin{cases} x_{\frac{2}{3}\vec{AI}} = \frac{2}{3}(x_I - x_A) = -3 \\ y_{\frac{2}{3}\vec{AI}} = \frac{2}{3}(y_I - y_A) = -\frac{1}{3} \end{cases}$ On remarque donc que $\vec{AP}$ et $\frac{2}{3}\vec{AI}$ ont les mêmes coordonnées donc $\boxed{\vec{AP} = \frac{2}{3}\vec{AI}}$ ②

P étant tel que $\vec{AP} = \frac{2}{3}\vec{AI}$ et I étant le milieu de [BC], $\boxed{P \text{ est donc le centre de gravité de ABC}}$ ①

III 2) par (H), $M \in [AB]$ donc $\boxed{x \in [0 ; 1]}$; $N \in [AD]$ donc $\boxed{y \in [0 ; 1]}$ ①

3) $\boxed{A(0 ; 0) ; B(1 ; 0) ; C(1 ; 1) ; D(0 ; 1) ; M(x ; 0) ; M'(x ; 1) ; N(0 ; y) ; N'(1 ; y)}$ ④

4) $(MN') \parallel (NM') \iff \vec{MN'}(1-x ; y)$ est colinéaire à $\vec{NM'}(x ; 1-y)$

$\iff x_{\vec{MN'}}\, y_{\vec{NM'}} - y_{\vec{MN'}}\, x_{\vec{NM'}} = 0$

$\iff (1-x)(1-y) - xy = 0$

$\iff 1 - x - y + \cancel{xy} - \cancel{xy} = 0$

$\iff \boxed{y = 1 - x}$ ②

Rem :
$(x ; y) \neq (1 ; 0)$ sinon $M = N'$!
$(x ; y) \neq (0 ; 1)$ sinon $M' = N$!

Or dans ce cas, $(1-x ; y)$ les coordonnées de $\vec{MN'}$ peuvent s'écrire $(y ; y)$. Comme de plus on a $\vec{AC}(1 ; 1)$ on a donc $\vec{MN'} = y\,\vec{AC}$ donc $\vec{MN'}$ est colinéaire à $\vec{AC}$

donc $\boxed{(MN') \parallel (AC) \parallel (NM')}$ ②

IV Appelons u_1 le 1er terme, u_2 le 2d, u_3 le 3ème et ainsi de suite.

$u_1 + u_2 + u_3 = 29$ donc $u_1 = 29 - u_2 - u_3$
$u_2 + u_3 + u_4 = 29$ donc $u_4 = 29 - u_2 - u_3$
donc $u_4 = u_1$

On montre facilement de même que $u_5 = u_2$; $u_6 = u_3$ et que la suite se répète donc de 3 en 3.

Comme $29 - 5 - 8 = 16$, la seule possibilité pour que $u_2 = 5$ et $u_7 = 8$ est :

8 ; 5 ; 16 ; 8 ; 5 ; 16 ; 8 ; 5 ; 16 ; 8 ; 5 ; 16 …

Or $2001 = 3 \times 667$ donc le 2001ème terme est égal au 3ème, 6ème, 9ème terme c'est à dire à $\boxed{16}$ ④