2^{k} Composition du 26 V 09 — 3h — Corrigé succinct

I) Partie A

1) Variations sur $]-\infty;1[$

Pour tous x_1, x_2 tels que $x_1 < x_2 < 1$

on a : $-x_1 > -x_2 > -1$

donc $1-x_1 > 1-x_2 > 0$

la fonction inverse est st $\searrow$ sur $\mathbb{R}^{*+}$

donc $\frac{1}{1-x_1} < \frac{1}{1-x_2}$

donc $\frac{3}{1-x_1} < \frac{3}{1-x_2}$

donc $-2+\frac{3}{1-x_1} < -2+\frac{3}{1-x_2}$

donc $\boxed{f \text{ est strictement croissante sur }]-\infty;1[}$ 1,5

Variations sur $]1;+\infty[$

Pour tous x_1, x_2 tels que $1 < x_1 < x_2$

on a : $-1 > -x_1 > -x_2$

donc $0 > 1-x_1 > 1-x_2$

la fonction inverse est st $\searrow$ sur $\mathbb{R}^{*-}$

donc $\frac{1}{1-x_1} < \frac{1}{1-x_2}$

donc $\frac{3}{1-x_1} < \frac{3}{1-x_2}$

donc $-2+\frac{3}{1-x_1} < -2+\frac{3}{1-x_2}$

donc $\boxed{f \text{ est strictement croissante sur }]1;+\infty[}$ 1,5

Tableau de variations :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
f		$\nearrow$	$\|$	$\nearrow$	

0,5

2) $\mathcal{C}_f \cap (xx')$: Résolvons $f(x)=0$ $(x \in D_f)$

$$\begin{cases} -2+\frac{3}{1-x}=0 \\ x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{-2+2x+3}{1-x}=0 \\ x\neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x+1=0 \\ x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow x=-\frac{1}{2}$$

Donc l'intersection de $\mathcal{C}_f$ avec (xx') est le point $\boxed{A(-\frac{1}{2};0)}$ 1

$\mathcal{C}_f \cap (yy')$

$f(0) = -2+\frac{3}{1-0} = 1$

Donc l'intersection de $\mathcal{C}_f$ avec (yy') est $\boxed{B(0;1)}$ 0,5

3) Positions relatives de $\mathcal{C}_f$ avec Δ

Etudions le signe de $f(x)-(-2)$: Pour tout x de D_f, $f(x)-(-2) = -2+\frac{3}{1-x}+2 = \frac{3}{1-x}$

$\boxed{\text{si } x<1}$ alors $1-x>0$ donc $f(x)-(-2)>0$ donc $f(x)>-2$ donc $\boxed{\mathcal{C}_f \text{ est au dessus de } \Delta}$

$\boxed{\text{si } x>1}$ alors $1-x<0$ donc $f(x)-(-2)<0$ donc $f(x)<-2$ donc $\boxed{\mathcal{C}_f \text{ est en dessous de } \Delta}$ 1

5) Résoudre graphiquement (E_1)

les solutions de (E_1) sont les abscisses des points d'intersection de $\mathcal{C}_f$ avec la droite d'eq $y=-x-3$: $\boxed{S=\{-2;2\}}$ 1

6) Résoudre (E_2) Condition : $x \neq 1$

$$(E_2) : \begin{cases} -2+\frac{3}{1-x} \geq -3 \\ x\neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1+\frac{3}{1-x} \geq 0 \\ x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{4-x}{1-x} \geq 0 \\ x \neq 1 \end{cases}$$

x	$-\infty$		1		4		$+\infty$
$4-x$		+		+	0	−	
$1-x$		+	0	−		−	
Q		+	$\|$	−	0	+	

$\boxed{S=]-\infty;1[\cup[4;+\infty[}$ 2

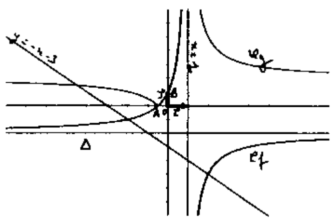
Résoudre (E_3) Conditions : $\begin{cases} x\in D_f \\ x+1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq 1 \\ x \neq -1 \end{cases}$

$$(E_3) : \begin{cases} -2+\frac{3}{1-x} = \frac{1}{1+x} \\ x\neq -1 \text{ et } x\neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \begin{cases} 2x(x+2)=0 \\ x\neq -1 \text{ et } x \neq 1 \end{cases}$$

$\boxed{S=\{-2;0\}}$ 2

Partie B

1) D_g : $g(x)=|f(x)|$ donc $\boxed{D_g = D_f}$ 0,25



$\mathcal{C}_f$ 1,5 $\mathcal{C}_g$ 1 3 droites 0,75

2) Ecrire $g(x)$ en fonction de $f(x)$

Pour tout x de D_f, $f(x) = -2+\frac{3}{1-x} = \frac{-2+2x+3}{1-x} = \frac{1+2x}{1-x}$

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
$1+2x$		−	0	+		+	
$1-x$		+		+	0	−	
$f(x)$		−	0	+	$\|$	−	

1,5

Bilan : si $x \in]-\infty;-\frac{1}{2}] \cup]1;+\infty[$ alors $f(x)\leq 0$ donc $g(x)=-f(x)$ et $\mathcal{C}_g$ et $\mathcal{C}_f$ sont symétriques par rapport à (xx')

si $x\in[-\frac{1}{2};1[$ alors $f(x)\geq 0$ donc $g(x)=f(x)$ donc $\mathcal{C}_g$ et $\mathcal{C}_f$ sont confondues. 2

3) Résoudre (E_4) Condition $x\neq 1$

$$(E_4) \Leftrightarrow \begin{cases} \left|-2+\frac{3}{1-x}\right| = 3 \\ x\neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2+\frac{3}{1-x} = -3 \text{ ou } -2+\frac{3}{1-x}=3 \\ x\neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \begin{cases} x=4 \text{ ou } x=\frac{2}{5} \\ x\neq 1 \end{cases}$$

$\boxed{S=\{\frac{2}{5};4\}}$ 2

II)

1) a) Montrer que BIC' et CIB' sont isométriques

Par (H) I est le milieu de $[BC]$ donc $\underline{BI=IC}$

Par (H) $AC'B$ est équilatéral donc $AB=BC'$; $AB'C$ est équilatéral donc $AC=CB'$; or ABC est isocèle en A donc $AB=AC$ donc $\underline{BC'=CB'}$

Par (H) $AC'B$ est équilatéral donc $\widehat{ABC'}=60°$ donc $\widehat{IBC'}=\widehat{ABI}+60$; $AB'C$ est équilatéral donc $\widehat{ACB'}=60°$ donc $\widehat{ICB'}=\widehat{ACI}+60$; or ABC est isocèle en A donc $\widehat{ABC}=\widehat{ACB}$ donc $\widehat{ABI}=\widehat{ACI}$ donc $\underline{\widehat{IBC'}=\widehat{ICB'}}$

Bilan : $\begin{cases} BI=IC \\ BC'=CB' \\ \widehat{IBC'}=\widehat{ICB'} \end{cases}$ donc 2 côtés de BIC' sont respectivement égaux à 2 côtés de CIB' et les angles compris entre ces côtés sont de même mesure

donc $\boxed{BIC' \text{ et } CIB' \text{ sont isométriques}}$ 3

b) Montrer que $IC'=IB'$

D'après a) BIC' et CIB' sont isométriques et $\widehat{IBC'}=\widehat{ICB'}$ donc les côtés opposés à ces angles sont de même longueur donc $\boxed{IC'=IB'}$ 1

2) Montrer que $s(C')=B'$

D'après 1)b) $IC'=IB'$ donc I appartient à la médiatrice de $[B'C']$

Par (H) $AC'B$ est équilatéral donc $AC'=AB$; $AB'C$ est équilatéral donc $AB'=AC$; or d'après 1)a) $AB=AC$ donc $AC'=AB'$ donc A appartient à la médiatrice de $[B'C']$

Bilan : la médiatrice de $[B'C']$ est (AI) donc $\boxed{s(C')=B'}$ 2

3) a) Images de (CC') et (BB') par s

Par (H) ABC est isocèle en A donc la médiane (AI) est aussi la médiatrice de $[BC]$ donc $s(C)=B$

or d'après 2) $s(C')=B'$ donc $\boxed{(CC') \text{ et } (BB') \text{ sont symétriques par } s}$ 1

b) Image de K par s

D'après a) (CC') et (BB') sont symétriques par s donc leur point d'intersection $\boxed{K \text{ est invariant}}$ 1

4) Image de L par s

D'après 3)a) $\underline{s(C)=B}$; d'après 2) $s(C')=B'$ donc $s(B')=C'$; donc (CB') et (BC') sont symétriques par s donc leur point d'intersection $\boxed{L \text{ est invariant}}$ 1

5) A, K, I et L alignés ?

D'après 3) K est invariant par s donc $\underline{K\in(AI)}$ et d'après 5) L est invariant par s donc $\underline{L\in(AI)}$

donc $\boxed{A, K, I \text{ et } L \text{ sont alignés}}$ 1

III)

1) Classe modale

C'est la classe qui a le plus gros effectif : $[24;26[$ 0,5

Encadrement de l'étendue

Soient x et y les valeurs extrêmes de la série

on a : $20 \leq x < 24$ et $30\leq y<36$

donc $-24 < -x \leq -20$ et $30 \leq y < 36$

donc $\boxed{6 < y-x < 16}$ 1,5

2) Moyenne de la série

Remplaçons chaque classe par son milieu : 1

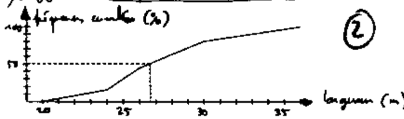
$$\bar{x} \approx \frac{40\times 22+70\times 25+45\times 27+45\times 29+50\times 33}{250} \approx \boxed{27{,}2\text{ m}}$$

3) Fréquences cumulées croissantes

Longueur (en m)	[20 ; 24[	[24 ; 26[	[26 ; 28[	[28 ; 30[	[30 ; 36[
Nombre de pièces	40	70	45	45	50
Fréquences (%)	16	28	18	18	20
Fréq cumulées	16	44	62	80	100

1,5

4) Polygone des fréquences cumulées croissantes



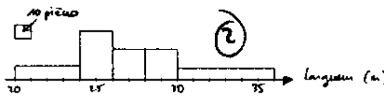
2

Une valeur approchée de la médiane est donnée par l'abscisse du point de la courbe d'ordonnée 50 : $\boxed{M \approx 26{,}7\text{ m}}$ 1

Interprétation : 50% des pièces de tissus mesurent moins de 26,7 m 0,5

5) Histogramme

Longueur (en m)	[20 ; 24[	[24 ; 26[	[26 ; 28[	[28 ; 30[	[30 ; 36[
Nombre de pièces	40	70	45	45	50
Amplitude classe	4	2	2	2	6
Effectif/amplitude	10	35	22,5	22,5	8,3



2

2K Composition du 30 V 3h Corrigé succinct

I) 1) Ensemble de définition : $x \in D \Leftrightarrow x^2-4 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -2$ et $x \neq 2$ donc $\boxed{D = \mathbb{R} - \{-2;2\}}$ (0,5)

2) Réécriture de $f(x)$: Pour tout x de D : $\boxed{-3 - \frac{7}{x^2-4}} = \frac{-3(x^2-4)-7}{x^2-4} = \frac{-3x^2+12-7}{x^2-4} = \frac{5-3x^2}{x^2-4} = \boxed{f(x)}$ (1)

3) a) Variations sur $[0;2[$

Pour tous x_1, x_2 tels que $0 \leq x_1 < x_2 < 2$

la fct carré est st croissante sur $\mathbb{R}^+$

donc $0 \leq x_1^2 < x_2^2 < 4$

donc $-4 \leq x_1^2 - 4 < x_2^2 - 4 < 0$

la fct inverse est st décroissante sur $\mathbb{R}^{*-}$

donc $\frac{1}{x_1^2-4} > \frac{1}{x_2^2-4}$

donc $\frac{-7}{x_1^2-4} < \frac{-7}{x_2^2-4}$

donc $-3 - \frac{7}{x_1^2-4} < -3 - \frac{7}{x_2^2-4}$

donc $f(x_1) < f(x_2)$

donc $\boxed{f \text{ est st croissante sur } [0;2[}$ (2)

Variations sur $]2;+\infty[$

Pour tous x_1, x_2 tels que $2 < x_1 < x_2$

la fct carré est st croissante sur $\mathbb{R}^+$

donc $4 < x_1^2 < x_2^2$

donc $0 < x_1^2 - 4 < x_2^2 - 4$

la fct inverse est st décroissante sur $\mathbb{R}^{*+}$

donc $\frac{1}{x_1^2-4} > \frac{1}{x_2^2-4}$

donc $\frac{-7}{x_1^2-4} < \frac{-7}{x_2^2-4}$

donc $-3 - \frac{7}{x_1^2-4} < -3 - \frac{7}{x_2^2-4}$

donc $f(x_1) < f(x_2)$

donc $\boxed{f \text{ est st croissante sur }]2;+\infty[}$ (2)

b) Parité

Pour tout x de D, $-x$ appartient aussi à D et :

$f(-x) = -3 - \frac{7}{(-x)^2-4} = -3 - \frac{7}{x^2-4} = f(x)$

donc $\boxed{f \text{ est paire}}$ (1)

c) Variation sur $\mathbb{R}^-$

f est paire et st croissante sur $[0;2[$

donc $\boxed{f \text{ est st décroissante sur }]-2;0]}$ (0,5)

f est paire et st croissante sur $]2;+\infty[$

donc $\boxed{f \text{ est st décroissante sur }]-\infty;-2[}$

d) Tableau de variations

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$
f	$\searrow$	‖	$\searrow$ $-\frac{5}{4}$ $\nearrow$	‖	$\nearrow$

(1)

4) $\mathcal{C}_f \cap (xx')$: Soit $M(x;y)$ un point quelconque

$\begin{cases} M \in \mathcal{C}_f \\ M \in (xx') \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{5-3x^2}{x^2-4} \\ x \neq -2 \text{ et } x \neq 2 \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5 = 3x^2 \\ x \neq -2 \text{ et } x \neq 2 \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\sqrt{15}}{3} \text{ ou } x = \frac{\sqrt{15}}{3} \\ y = 0 \end{cases}$

Il y a donc 2 pts d'intersection : $\boxed{A\left(-\frac{\sqrt{15}}{3};0\right) \text{ et } B\left(\frac{\sqrt{15}}{3};0\right)}$ (1)

5) Position relative de $\mathcal{C}_f$ avec la droite d'eq $y=-3$: Pour tout x de D, déterminons le signe de $f(x) - (-3)$:

$f(x) - (-3) = f(x) + 3 = \cancel{-3} - \frac{7}{x^2-4} \cancel{+3} = -\frac{7}{x^2-4} = -\frac{7}{(x-2)(x+2)}$

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
-7		$-$		$-$		$-$	
$x-2$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$	
$f(x)-(-3)$		$-$	‖	$+$	‖	$-$	

Bilan, soit d la droite d'eq $y=-3$

pour $x \in]-\infty;-2[$, $f(x) < -3$ donc $\mathcal{C}_f$ est en dessous de d

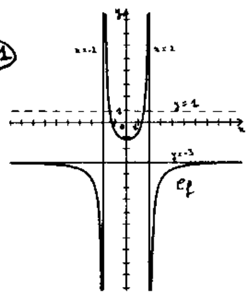
pour $x \in]-2;2[$, $f(x) > -3$ donc $\mathcal{C}_f$ est au dessus de d

pour $x \in]2;+\infty[$, $f(x) < -3$ donc $\mathcal{C}_f$ est en dessous de d

(2)

6) Courbe

(2+1)



7) Résoudre (I) : $f(x) \geq 1$

(I) $\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{5-3x^2}{x^2-4} \geq 1 \\ x \neq -2 \text{ et } x \neq 2 \end{cases}$

(I) $\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{5-3x^2-x^2+4}{x^2-4} \geq 0 \\ x \neq -2 \text{ et } x \neq 2 \end{cases}$

(I) $\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{9-4x^2}{x^2-4} \geq 0 \\ x \neq -2 \text{ et } x \neq 2 \end{cases}$

(I) $\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{(3-2x)(3+2x)}{(x-2)(x+2)} \geq 0 \\ x \neq -2 \text{ et } x \neq 2 \end{cases}$

x	$-\infty$		-2		$-3/2$		$3/2$		2		$+\infty$
$3-2x$		$+$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	
$3+2x$		$-$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$x-2$		$-$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$		$+$		$+$	
Q		$-$	‖	$+$	0	$-$	0	$+$	‖	$-$	

$\boxed{S =]-2;-\tfrac{3}{2}] \cup [\tfrac{3}{2};2[}$ (3)

Interprétation graphique :

$\mathcal{C}_f$ est située au dessus de la droite d'eq $y=1$ pour les points de $\mathcal{C}_f$ dont l'abscisse appartient à $]-2;-\frac{3}{2}]$ ou $[\frac{3}{2};2[$. (1)

II) 1) Calculer $f(2)$, $f(0)$, $f(1/3)$, $f(\sqrt{2})$:

$\boxed{f(2)} = |-2-1| - |2\times2-3| = |-3| - |1| = \boxed{2}$

$\boxed{f(0)} = |-0-1| - |2\times0-3| = |-1| - |-3| = \boxed{-2}$

$\boxed{f(1/3)} = |-\frac{1}{3}-1| - |2\times\frac{1}{3}-3| = |-\frac{4}{3}| - |-\frac{7}{3}| = \boxed{-1}$

$\boxed{f(\sqrt{2})} = |-\sqrt{2}-1| - |2\sqrt{2}-3| = \sqrt{2}+1-(3-2\sqrt{2}) = \boxed{3\sqrt{2}-2}$

(2)

2) Résoudre $f(x) = 0$:

$f(x)=0 \Leftrightarrow |-x-1| - |2x-3| \Leftrightarrow -x-1 = 2x-3$ ou $-x-1 = -2x+3 \Leftrightarrow 3x=2$ ou $x=4 \Leftrightarrow x=\frac{2}{3}$ ou $x=4$

$\boxed{S = \{\tfrac{2}{3};4\}}$ (1)

3) Écrire $f(x)$ sans valeurs absolues :

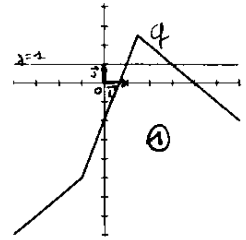
- si $x \leq -1$ alors $\begin{cases} -x-1 \geq 0 \text{ donc } |-x-1| = -x-1 \\ 2x \leq -2 \text{ donc } 2x-3 \leq -5 \text{ donc } |2x-3| = -2x+3 \end{cases}$ donc $\boxed{f(x)} = -x-1-(-2x+3) = \boxed{x-4}$
- si $-1 \leq x \leq \frac{3}{2}$ alors $\begin{cases} -x-1 \leq 0 \text{ donc } |-x-1| = x+1 \\ 2x \leq 3 \text{ donc } 2x-3 \leq 0 \text{ donc } |2x-3| = -2x+3 \end{cases}$ donc $\boxed{f(x)} = x+1-(-2x+3) = \boxed{3x-2}$ (2)
- si $x \geq \frac{3}{2}$ alors $\begin{cases} -x-1 \leq 0 \text{ donc } |-x-1| = x+1 \\ 2x \geq 3 \text{ donc } 2x-3 \geq 0 \text{ donc } |2x-3| = 2x-3 \end{cases}$ donc $\boxed{f(x)} = x+1-(2x-3) = \boxed{-x+4}$

Variations sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$	-1	$3/2$	$+\infty$
f	$\nearrow$	-5 $\nearrow$	$\frac{5}{2}$ $\searrow$	

(1)

Courbe :



(1)

4) Résoudre graphiquement (I) : $f(x) < 1$

Les solutions sont les abscisses des points de $\mathcal{C}_f$ situés strictement au dessous de la droite d'eq $y=1$.

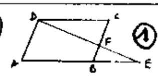
$\boxed{S =]-\infty;1[\cup]3;+\infty[}$ (1)

Résoudre (I) par le calcul

- si $x \leq -1$: $\begin{cases} (I) \\ x \leq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-4 < 1 \\ x \leq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 5 \\ x \leq -1 \end{cases} \Leftrightarrow \{ x \leq -1$
- si $-1 \leq x \leq \frac{3}{2}$: $\begin{cases} (I) \\ -1 \leq x \leq \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x-2 < 1 \\ -1 \leq x \leq \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < 1 \\ -1 \leq x \leq \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \{ -1 \leq x < 1$
- si $x \geq \frac{3}{2}$: $\begin{cases} (I) \\ x \geq \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -x+4 < 1 \\ x \geq \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 3 \\ x \geq \frac{3}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \{ x > 3$

Bilan : $\boxed{S =]-\infty;1[\cup]3;+\infty[}$ (2)

III)



(1)

1) Coordonnées de E

Par (H) $\overrightarrow{BE} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ donc $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AE} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ donc $\overrightarrow{AE} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} = \frac{5}{3}\overrightarrow{AB}$ donc $\boxed{E\left(\frac{5}{3};0\right)}$ (1)

2) Coordonnées de F

Par (H) $2\overrightarrow{CF} + 3\overrightarrow{BF} = \vec{0}$

donc $2\overrightarrow{CB} + 2\overrightarrow{BF} + 3\overrightarrow{BF} = \vec{0}$

donc $5\overrightarrow{BF} = 2\overrightarrow{BC}$

donc $\overrightarrow{BF} = \frac{2}{5}\overrightarrow{BC}$

F est donc l'image de B par la translation de vecteur $\frac{2}{5}\overrightarrow{BC}$

$\overrightarrow{BF} = \frac{2}{5}\overrightarrow{BC}$

donc $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AF} = \frac{2}{5}\overrightarrow{BC}$

donc $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + \frac{2}{5}\overrightarrow{AD}$

(car par (H) ABCD est un parallélogramme donc $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$)

donc $\boxed{F\left(1;\frac{2}{5}\right)}$ (2)

3) Montrer que D, E et F sont alignés

$D(0;1)$; $F(1;\frac{2}{5})$; $E(\frac{5}{3};0)$ donc $\overrightarrow{DE}\left(\frac{5}{3};-1\right)$ et $\overrightarrow{DF}\left(1;-\frac{3}{5}\right)$

$x_{\overrightarrow{DE}}\, y_{\overrightarrow{DF}} - x_{\overrightarrow{DF}}\, y_{\overrightarrow{DE}} = \frac{5}{3}\times\left(-\frac{3}{5}\right) - (-1)\times 1 = -1+1 = 0$

donc $\overrightarrow{DE}$ et $\overrightarrow{DF}$ sont colinéaires

donc $\boxed{\text{D, E et F sont alignés}}$ (2)

IV) $\boxed{\text{1) V} \quad \text{2) F} \quad \text{3) F} \quad \text{4) F} \quad \text{5) F} \quad \text{6) V}}$ (6)

$2^{\text{nde}}\,5K$ DS du 10/1/05 2h Corrigé succinct

I) 1) Pour tout x de $\mathbb{R}$, $-x$ appartient aussi à $\mathbb{R}$ et $f(-x) = \sqrt{\dfrac{2}{(-x)^2+1}} = \sqrt{\dfrac{2}{x^2+1}} = f(x)$ donc $\boxed{f \text{ est paire}}$ 1

2) Pour tout x de $\mathbb{R}$:

- Un carré est toujours positif donc $x^2 \geq 0$ donc $x^2+1>0$ donc $\boxed{\dfrac{2}{x^2+1} > 0}$ 1
- $\dfrac{2}{x^2+1} - 2 = \dfrac{2-2x^2-2}{x^2+1} = -\dfrac{2x^2}{x^2+1} \leq 0$ car un carré est toujours positif donc $\boxed{\dfrac{2}{x^2+1} \leq 2}$ 1
- D'après ce qui précède, $0 < \dfrac{2}{x^2+1} \leq 2$ or la fonction racine est st croissante sur $\mathbb{R}^+$ donc $\boxed{0 < f(x) \leq \sqrt{2}}$ 1

Donc $\mathcal{C}_f$ est située entre l'axe des abscisses et la droite d'équation $y = \sqrt{2}$ 1

3) Variation sur $\mathbb{R}^+$

Pour tous x_1, x_2 tels que $0 \leq x_1 < x_2$

la fct carré est st croissante sur $\mathbb{R}^+$

donc $0 \leq x_1^2 < x_2^2$

donc $1 \leq x_1^2+1 < x_2^2+1$

la fct inverse est st décroissante sur $\mathbb{R}^{*+}$ et les inverses de nombres positifs sont positifs

donc $1 \geq \dfrac{1}{x_1^2+1} > \dfrac{1}{x_2^2+1} > 0$

donc $2 \geq \dfrac{2}{x_1^2+1} > \dfrac{2}{x_2^2+1} > 0$

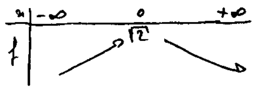
la fct racine est st croissante sur $\mathbb{R}^+$

donc $\sqrt{\dfrac{2}{x_1^2+1}} > \sqrt{\dfrac{2}{x_2^2+1}}$

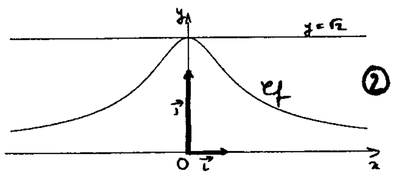
donc $f(x_1) > f(x_2)$

f est donc st décroissante sur $\mathbb{R}^+$ 3

f étant paire, on en déduit le tableau de variations ci-dessous :



1



2

II) • La moyenne est : $m = \dfrac{24{,}1 + 4\times 24{,}3 + 13\times 24{,}5 + \cdots + 5\times 25{,}7 + 2\times 25{,}9}{100} = 24{,}944$ mm 1,5

- $\dfrac{100+1}{2} = 50{,}5$. La médiane M est donc la demi somme des $50^{\text{ème}}$ et $51^{\text{ème}}$ termes. $M = \dfrac{24{,}9+24{,}9}{2} = 24{,}9$ mm 1,5
- L'étendue est : $E = 25{,}9 - 24{,}1 = 1{,}8$ mm 1,5

D'après ce qui précède :

1) $E = 1{,}8$; $10\% \times m \approx 2{,}49$ donc $E < 10\% \times m$ L'étendue est bien inférieure à 10% de la moyenne 1,5

2) $m - M = 0{,}044 < 0{,}2$ donc l'écart entre la moyenne et la médiane est bien inférieur à 0,2 1,5

3) $\begin{cases} m - 0{,}8 = 24{,}144 \\ m + 0{,}8 = 25{,}744 \end{cases}$ Seuls le diamètre à 24,1 et les 2 diamètres à 25,9 sont en dehors de la plage souhaitée soit 3% des diamètres. Donc plus de 95% des diamètres sont dans l'intervalle $[m - 0{,}8\,;\, m + 0{,}8]$ 1,5

Bilan : La série vérifie toutes les conditions requises.

On peut donc considérer que $\boxed{\text{la machine a un fonctionnement "normal"}}$

III) Dans les calculs ci-dessous, remplaçons chaque classe par son milieu : 1

1) L'espérance de vie à la naissance est :

$$E_0 \approx \frac{0{,}05\times 5 + 0{,}02\times 15 + 0{,}02\times 25 + \cdots + 0{,}10\times 105}{1} \approx 73 \text{ ans}$$ 2

2) L'espérance de vie à 30 ans est :

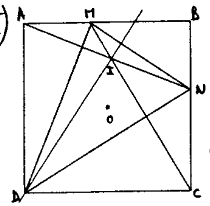
$$E_{30} \approx \frac{0{,}02\times 35 + 0{,}04\times 45 + 0{,}08\times 55 + \cdots + 0{,}10\times 105}{0{,}02 + 0{,}04 + 0{,}08 + \cdots + 0{,}10} \approx 79 \text{ ans}$$ 2

3) L'espérance de vie à 70 ans est :

$$E_{70} \approx \frac{0{,}15\times 75 + 0{,}15\times 85 + 0{,}15\times 95 + 0{,}10\times 105}{0{,}15 + 0{,}15 + 0{,}15 + 0{,}10} \approx 88 \text{ ans}$$ 2

4) Dans la question 1), nous avons trouvé la même espérance de vie à la naissance que dans l'étude. On peut donc penser que nos données sont tout à fait cohérentes avec celles de cette étude. Or on devient médecin en général vers 30 ans. Il faut donc comparer l'espérance de vie des médecins, non pas avec l'espérance de vie des français à la naissance, mais plutôt avec celle à 30 ans. Or c'est la même ! La conclusion de l'étude concernant les médecins n'est donc pas justifiée. 3

IV)



1

1) par (H) $r(A) = B$ et $r(B) = C$ donc $[AB]$ a pour image $[BC]$

donc M qui est le point de $[AB]$ situé à la distance AM de A a pour image le point de $[BC]$ situé à la distance AM de B c'est à dire par (H) le point N : $\boxed{r(M) = N}$ 2

2) $\begin{cases} \text{d'après 1)} & r(M) = N \\ \text{par (H)} & r(C) = D \end{cases}$ donc (CM) a pour image (DN) donc $\boxed{(CM) \perp (DN)}$ 2

3) $\begin{cases} \text{d'après 1)} & r(M) = N \\ \text{par (H)} & r(D) = A \end{cases}$ donc (DM) a pour image (AN) donc $\boxed{(DM) \perp (AN)}$ 2

4) Dans le triangle DMN :

D'après 2) $(CM) \perp (DN)$ donc (CM) est la hauteur issue de M

D'après 3) $(DM) \perp (AN)$ donc (AN) est la hauteur issue de N

Or par (H) (AN) et (CM) se coupent en I donc I est l'orthocentre du triangle DMN

donc la $3^{\text{ème}}$ hauteur (DI) coupe le côté (MN) perpendiculairement.

$\boxed{(DI) \perp (MN)}$ 3