2K DS du 7 II 07 2h Corrigé succinct

I) Résoudre

(E_1) : $|x+1| = 4$

$(E_1) \Leftrightarrow x+1 = -4$ ou $x+1 = 4$

$(E_1) \Leftrightarrow x = -5$ ou $x = 3$

$\boxed{S = \{-5\,;\,3\}}$ (2)

(E_2) : $|1-x| < 4$

$(E_2) \Leftrightarrow -4 < 1-x < 4$

$(E_2) \Leftrightarrow -5 < -x < 3$

$(E_2) \Leftrightarrow -3 < x < 5$

$\boxed{S =]-3\,;\,5[}$ (2)

(E_3) : $|x+1| = |2x|\,|x+1|$

$(E_3) \Leftrightarrow |x+1| = |2x(x+1)|$

$(E_3) \Leftrightarrow x+1 = 2x(x+1)$ ou $x+1 = -2x(x+1)$

$(E_3) \Leftrightarrow (x+1)(1-2x) = 0$ ou $(x+1)(1+2x) = 0$

$(E_3) \Leftrightarrow x = -1$ ou $x = \frac{1}{2}$ ou $x = -1$ ou $x = -\frac{1}{2}$

$\boxed{S = \{-1\,;\,-\tfrac{1}{2}\,;\,\tfrac{1}{2}\}}$ (2)

(E_4) : $|x+2| + |4x - x^2| > -\sqrt{2}$

la somme de deux valeurs absolues est nécessairement positive ou nulle

donc $\boxed{S = \mathbb{R}}$ (2)

(E_5) : $|1-x| < 4x+1$

2 cas

. Si $x \leq 1$ alors $1-x \geq 0$ et $|1-x| = 1-x$

$\begin{cases}(E_5)\\ x \leq 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}1-x < 4x+1\\ x \leq 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}5x > 0\\ x \leq 1\end{cases} \Leftrightarrow \underline{0 < x \leq 1}$

. Si $x \geq 1$ alors $1-x \leq 0$ et $|1-x| = x-1$

$\begin{cases}E_5\\ x \geq 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x-1 < 4x+1\\ x \geq 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}3x > -2\\ x \geq 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x > -\frac{2}{3}\\ x \geq 1\end{cases}$

$\Leftrightarrow \underline{x \geq 1}$

Bilan $\boxed{S = \mathbb{R}^{*+}}$ (2)

II) 1) Ensemble de définition

Pour tout x de $\mathbb{R}$, $x^2+4x+4 = (x+2)^2 \geq 0$ et $x^2-4x+4 = (x-2)^2 \geq 0$

les deux radicandes étant donc toujours positifs, il n'y a pas de valeurs interdites : $\boxed{D_f = \mathbb{R}}$ (1)

2) Parité

Pour tout x de $\mathbb{R}$, $-x$ appartient aussi à $\mathbb{R}$

et $f(-x) = \sqrt{(-x)^2+4(-x)+4} + \sqrt{(-x)^2-4(-x)+4} = \sqrt{x^2-4x+4} + \sqrt{x^2+4x+4} = f(x)$ donc $\boxed{f \text{ est paire}}$ (1)

3) Montrer que f est affine par intervalles

Pour tout x de $\mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x^2+4x+4} + \sqrt{x^2-4x+4} = \sqrt{(x+2)^2} + \sqrt{(x-2)^2} = |x+2| + |x-2|$ (1)

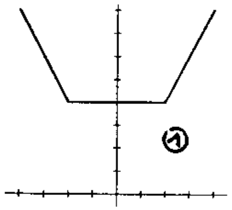
3 cas

. Si $x \leq -2$ alors $\begin{cases}x+2 \leq 0 & \text{donc } |x+2| = -x-2\\ x-2 \leq -4 & \text{donc } |x-2| = -x+2\end{cases}$ donc $f(x) = -x-2-x+2 = -2x$

. Si $-2 \leq x \leq 2$ alors $\begin{cases}x+2 \geq 0 & \text{donc } |x+2| = x+2\\ x-2 \leq 0 & \text{donc } |x-2| = -x+2\end{cases}$ donc $f(x) = x+2-x+2 = 4$

. Si $x \geq 2$ alors $\begin{cases}x+2 \geq 0 & \text{donc } |x+2| = x+2\\ x-2 \geq 0 & \text{donc } |x-2| = x-2\end{cases}$ donc $f(x) = x+2+x-2 = 2x$

Bilan, $\begin{cases}\text{si } x \leq -2, & f(x) = -2x\\ \text{si } -2 \leq x \leq 2, & f(x) = 4\\ \text{si } x \geq 2, & f(x) = 2x\end{cases}$ $\boxed{\text{donc } f \text{ est bien une fonction affine par intervalles}}$ (3)



(1)

5) Résoudre (E) : $f(x) = 2x$

3 cas :

• si $x \leq -2$ alors d'après 3) $f(x) = -2x$

$\begin{cases}(E)\\ x \leq -2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-2x = 2x\\ x \leq -2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}4x = 0\\ x \leq -2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x = 0\\ x \leq -2\end{cases}$ pas de solution dans ce cas !

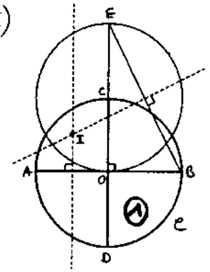
• si $-2 \leq x \leq 2$ alors d'après 3) $f(x) = 4$

$\begin{cases}(E)\\ -2 \leq x \leq 2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}4 = 2x\\ -2 \leq x \leq 2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x = 2\\ -2 \leq x \leq 2\end{cases} \Leftrightarrow x = 2$ (3) Bilan : $\boxed{S = [2\,;\,+\infty[}$

• si $x \geq 2$ alors d'après 3) $f(x) = 2x$

$\begin{cases}(E)\\ x \geq 2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2x = 2x\\ x \geq 2\end{cases} \Leftrightarrow x \geq 2$

III)



1) a) Construction de I

Par (H), $r(A) = O$ donc $IA = IO$ donc I appartient à la médiatrice de $[AO]$

Par (H), $r(B) = E$ donc $IB = IE$ donc I appartient à la médiatrice de $[BE]$

$\boxed{\text{I est donc l'intersection des médiatrices de } [AO] \text{ et } [BE]}$ (2)

b) Angle de la rotation

Par (H) $r(A) = O$ et $r(B) = E$ donc $[AB]$ a pour image $[OE]$

or par (H) $(AB) \perp (CO)$ donc $(AB) \perp (OE)$

or si (AB) et son image (OE) sont perpendiculaires, $\boxed{\text{r est alors un quart de tour}}$ (3) (direct)

2) Image de $\mathcal{C}$

D'après 1) b), $[AB]$ a pour image $[OE]$ donc $\boxed{\mathcal{C} \text{ qui est le cercle de diamètre } [AB] \text{ a pour image le cercle de diamètre } [OE]}$ (2)

IV) 1) $x(t)$ et $y(t)$

par (H) $x(0) = -6$ et $x(t)$ augmente à raison de 6 km par heure donc pour $t \geq 0$ on a $\boxed{x(t) = -6+6t}$ (1)

$y(0) = 10$ et $y(t)$ diminue à raison de 4 km par heure donc pour $t \geq 0$ on a $\boxed{y(t) = 10-4t}$ (1)

2) $d(t)$

La distance entre Xavier et Yolande peut donc s'écrire : $\boxed{d(t)} = |x(t) - y(t)| = |-6+6t-10+4t| = \boxed{|10t-16|}$ (2)

3) A quel moment peuvent-ils se voir ?

Résolvons (I) : $d(t) \leq 0{,}5$

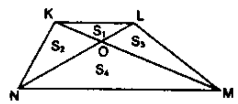
$(I) \Leftrightarrow |10t-16| \leq 0{,}5 \Leftrightarrow -0{,}5 \leq 10t-16 \leq 0{,}5 \Leftrightarrow 15{,}5 \leq 10t \leq 16{,}5 \Leftrightarrow 1{,}55 \leq t \leq 1{,}65$ (3)

or $55 \times \frac{60}{100} = 33$ donc $1{,}55\,h = 1\,h\,33\,min$

de même $1{,}65 - 1{,}55 = 0{,}10$ et $10 \times \frac{60}{100} = 6$ donc $0{,}10\,h = 6\,min$

Bilan $\boxed{\text{Xavier et Yolande se voient au bout d'} 1^h 33 \text{ min et pendant 6 min}}$ (1)

V)



Exprimer S_4 en fonction de S_1 :

• Appelons h la hauteur issue de K commune aux triangles KON et KOL

On a $S_1 = \frac{h \times OL}{2}$ et $S_2 = \frac{h \times ON}{2}$

or par (H), $S_2 = 3S_1$ donc $\frac{h \times ON}{2} = 3 \times \frac{h \times OL}{2}$ donc $\underline{ON = 3OL}$ (2)

• Par (H) K, O et M sont alignés ainsi que L, O et N

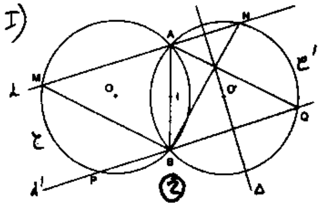
de plus $[KL]$ et $[MN]$ sont les bases d'un trapèze donc : $(KL) \parallel (MN)$

donc d'après Thalès dans les triangles KOL et MON, on a :

$\frac{S_4}{S_1} = \left(\frac{ON}{OL}\right)^2 = 3^2 = 9$ Bilan : $\boxed{S_4 = 9S_1}$ (2)

2I DS du 3 IV 06 3h Corrigé succinct

I)



(2)

1) a) par (H) I est le milieu de [AB] donc $s(A) = B$
par (H) $A \in d$ donc $s(d)$ est la parallèle à d passant par B
donc $\boxed{s(d) = d'}$ (2)

par (H) $OA = OB = O'A = O'B$ donc le quadrilatère $OAO'B$ est un losange
donc ses diagonales se coupent en leur milieu donc I est le milieu de [OO']
donc $s(O) = O'$ donc $s(\mathcal{C})$ est le cercle de centre O' et de même rayon que $\mathcal{C}$ donc $\boxed{s(\mathcal{C}) = \mathcal{C}'}$ (2)

par (H) A et M sont les intersections de d et $\mathcal{C}$ et d'après ce qui précède $s(d) = d'$ et $s(\mathcal{C}) = \mathcal{C}'$
donc A et M ont pour images les intersections de d' et $\mathcal{C}'$ c'est à dire B et Q.
Or on a vu que $s(A) = B$ donc $\boxed{s(M) = Q}$ (2)

b) d'après a) $\begin{cases} s(A) = B \\ s(M) = Q \end{cases}$ donc $s(B) = A$ donc [BM] a pour image [AQ] donc $\boxed{BM = AQ}$ (2)

2) a) Par (H) $d \parallel d'$ donc $(AN) \parallel (BQ)$ donc les médiatrices de [AN] et [BQ] sont parallèles.
Par (H) $O'A = O'N$ donc O' appartient à la médiatrice de [AN]
$O'B = O'Q$ donc O' appartient à la médiatrice de [BQ]
Bilan, les médiatrices de [AN] et [BQ] sont parallèles et passent par O'.
Elles sont donc confondues : $\boxed{\Delta \text{ est donc aussi la médiatrice de } [BQ]}$ (2)

b) Par (H) Δ est la médiatrice de [AN] donc $\boxed{\begin{array}{l} s'(A) = N \\ s'(Q) = B \end{array}}$ (2)
d'après a) Δ est la médiatrice de [BQ] donc

3) D'après 2b) $s'(A) = N$ et $s'(Q) = B$ donc [AQ] a pour image [NB] donc $AQ = NB$
or d'après 1b) $AQ = BM$ donc $BM = NB$ donc $\boxed{\text{le triangle BMN est isocèle en B}}$ (2)

II) Partie A :

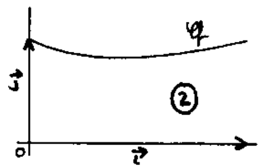
1) Pour tous x_1, x_2 de $[0;1]$ on a :

$$f(x_1) - f(x_2) = \frac{x_1^2+1}{x_1+1} - \frac{x_2^2+1}{x_2+1} = \frac{(x_1^2+1)(x_2+1) - (x_2^2+1)(x_1+1)}{(x_1+1)(x_2+1)}$$

$$= \frac{x_1^2 x_2 + x_2 + x_1^2 + 1 - x_1 x_2^2 - x_1 - x_2^2 - 1}{(x_1+1)(x_2+1)}$$

$$= \frac{x_1^2 - x_2^2 + x_1^2 x_2 - x_1 x_2^2 - x_1 + x_2}{(x_1+1)(x_2+1)} = \frac{(x_1 - x_2)(x_1 + x_2) + x_1 x_2 (x_1 - x_2) - (x_1 - x_2)}{(x_1+1)(x_2+1)}$$

$$= \boxed{\frac{(x_1 - x_2)(x_1 + x_2 + x_1 x_2 - 1)}{(x_1+1)(x_2+1)}} \quad (2)$$



(2)

2) variation sur $[0 ; \sqrt{2} - 1]$

Pour tous x_1, x_2 tels que $0 \le x_1 < x_2 \le \sqrt{2} - 1$

- $x_1 < x_2$ donc $\underline{x_1 - x_2 < 0}$
- $\left.\begin{array}{l} 0 \le x_1 < \sqrt{2}-1 \\ 0 < x_2 \le \sqrt{2}-1 \end{array}\right\}$ donc $\begin{cases} 0 \le x_1 x_2 < (\sqrt{2}-1)^2 \\ 0 < x_1 + x_2 < 2(\sqrt{2}-1) \end{cases}$

donc $\begin{cases} 0 \le x_1 x_2 < 3 - 2\sqrt{2} \\ 0 < x_1 + x_2 < 2\sqrt{2} - 2 \end{cases}$

donc $0 < x_1 x_2 + x_1 + x_2 < 3 - 2\cancel{\sqrt{2}} + 2\cancel{\sqrt{2}} - 2$
donc $0 < x_1 x_2 + x_1 + x_2 < 1$
donc $\underline{x_1 x_2 + x_1 + x_2 - 1 < 0}$

- $x_1 \ge 0$ donc $\underline{x_1 + 1 > 0}$
- $x_2 > 0$ donc $\underline{x_2 + 1 > 0}$

Bilan $f(x_1) - f(x_2) > 0$ donc $f(x_1) > f(x_2)$
donc f est strictement décroissante sur $[0 ; \sqrt{2} - 1]$ (2)

variations sur $[\sqrt{2} - 1 ; 1]$

Pour tous x_1, x_2 tels que $\sqrt{2} - 1 \le x_1 < x_2 \le 1$

- $x_1 < x_2$ donc $\underline{x_1 - x_2 < 0}$
- $\left.\begin{array}{l} \sqrt{2}-1 \le x_1 \\ \sqrt{2}-1 < x_2 \end{array}\right\}$ donc $\begin{cases} (\sqrt{2}-1)^2 < x_1 x_2 \\ 2(\sqrt{2}-1) < x_1 + x_2 \end{cases}$

donc $\begin{cases} 3 - 2\sqrt{2} < x_1 x_2 \\ 2\sqrt{2} - 2 < x_1 + x_2 \end{cases}$

donc $3 - 2\cancel{\sqrt{2}} + 2\cancel{\sqrt{2}} - 2 < x_1 x_2 + x_1 + x_2$
donc $1 < x_1 x_2 + x_1 + x_2$
donc $\underline{x_1 x_2 + x_1 + x_2 - 1 > 0}$

- $x_1 > 0$ donc $\underline{x_1 + 1 > 0}$
- $x_2 > 0$ donc $\underline{x_2 + 1 > 0}$

Bilan $f(x_1) - f(x_2) < 0$ donc $f(x_1) < f(x_2)$
donc f est strictement croissante sur $[\sqrt{2} - 1 ; 1]$ (2)

Calculons $f(\sqrt{2} - 1)$:

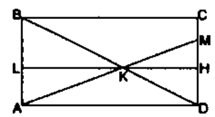
$$f(\sqrt{2}-1) = \frac{(\sqrt{2}-1)^2 + 1}{\sqrt{2} - 1 + 1} = \frac{3 - 2\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2}} = \frac{4 - 2\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{2} - 4}{2} = 2\sqrt{2} - 2$$

Tableau de variations :

x	0		$\sqrt{2}-1$		1
f	1	↘	$2\sqrt{2}-2$	↗	1

(1)

Partie B :



1) Par (H) $\widehat{BKA}$ et $\widehat{MKD}$ sont opposés par le sommet donc $\widehat{BKA} = \widehat{MKD}$
Par (H) (BD) coupe les parallèles (AB) et (CD) donc les angles alternes-internes $\widehat{ABD}$ et $\widehat{BDC}$ sont égaux donc $\widehat{ABK} = \widehat{KDM}$
Bilan, 2 angles de ABK sont respectivement égaux à 2 angles de MDK
donc $\boxed{\text{ABK et MDK sont semblables}}$ (2)

Et comme $\widehat{BKA} = \widehat{MKD}$ les côtés BA et MD opposés à ces angles se correspondent : $\boxed{k = \boxed{\frac{MD}{BA} = \frac{x}{1}} = x}$ (1)

2) a) Par (H) $(LH) \parallel (AD)$ donc ALHD est un rectangle donc $LH = AD = 2$. Or $K \in [LH]$ donc $\boxed{KL} = LH - KH = \boxed{2 - h}$ (0,5)

b) D'après 1) $\dfrac{\text{Aire}(MDK)}{\text{Aire}(ABK)} = k^2 = x^2$ (1)

c) Par (H) $[MD] \perp [KH]$ donc $\text{Aire}(MDK) = \dfrac{MD \times KH}{2} = \dfrac{hx}{2}$
Par (H) $[LK] \perp [AB]$ donc $\text{Aire}(ABK) = \dfrac{AB \times LK}{2} = \dfrac{2-h}{2}$

donc $\dfrac{\text{Aire}(MDK)}{\text{Aire}(ABK)} = \dfrac{\frac{hx}{2}}{\frac{2-h}{2}} = \dfrac{hx}{2-h} = x^2$
donc $hx = x^2(2-h)$
donc $\boxed{h = x(2-h)}$ (2) $(x \ne 0)$

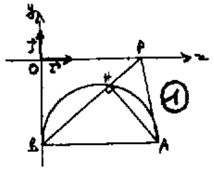
d) D'après c) $h = x(2-h)$ donc $h = 2x - xh$ donc $h + xh = 2x$ donc $h(1+x) = 2x$ donc $\boxed{h = \frac{2x}{1+x}}$ (1) $(x \ne -1)$

e) Donc d'après c) et d), $\text{Aire}(MDK) = \dfrac{hx}{2} = \boxed{\dfrac{x^2}{1+x}}$ et $\text{Aire}(ABK) = \dfrac{2-h}{2} = \boxed{\dfrac{1}{1+x}}$ (2)

3) Pour tout x de $]0;1]$, $A(x) = \text{Aire}(ABK) + \text{Aire}(MDK) = \dfrac{1}{1+x} + \dfrac{x^2}{1+x} = \dfrac{x^2+1}{x+1} = \boxed{f(x)}$ (0,5)
Or d'après son tableau de variation, f admet un minimum de $2\sqrt{2} - 2$ donc la plus petite valeur atteinte par A(x) est $\boxed{2\sqrt{2} - 2}$ (1)

2^DJ DS du 25 III 04 corrigé succinct

I) 1) Quelle que soit la position de P à droite de O, on a par (H) (AH) ⊥ (BH)
donc $\boxed{\text{H appartient au cercle de diamètre [AB]}}$ (1,5)



2) Sur ce cercle de diamètre [AB], le point le plus éloigné de B est le point qui lui est diamétralement opposé, c'est à dire A. H appartenant à ce cercle, on a donc : $BB \leq BH \leq BA$ soit $\boxed{0 \leq BH \leq 4}$ (1,5) (1)

3) • Par (H) $y_A = y_B$ donc (AB) est parallèle à (OP) donc (BP) est sécante aux parallèles (AB) et (OP) donc les angles $\widehat{ABP}$ et $\widehat{BPO}$ sont alternes internes et égaux donc $\widehat{ABH} = \widehat{BPO}$

• De plus par (H) $\widehat{AHB} = 90° = \widehat{POB}$

Bilan : 2 angles de AHB sont respectivement égaux à 2 angles de POB donc ces deux triangles sont $\boxed{\text{semblables}}$ et leurs derniers angles sont égaux : $\widehat{HAB} = \widehat{PBO}$ (2)

4) • D'après Pythagore dans le triangle POB rectangle en O, on a $PB^2 = BO^2 + OP^2 = 9 + x^2$
donc $PB = \sqrt{9+x^2}$ (PB est une longueur positive donc $PB \neq -\sqrt{9+x^2}$)

• D'après 3) les triangles AHB et POB sont semblables donc dans ces triangles, à deux angles égaux sont opposés deux côtés qui se correspondent :

$\widehat{HAB} = \widehat{PBO}$ donc [HB] et [PO] se correspondent
$\widehat{AHB} = \widehat{POB}$ donc [AB] et [PB] se correspondent

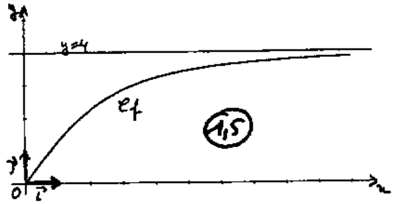
donc $\frac{HB}{PO} = \frac{AB}{PB}$ donc $\boxed{BH = \frac{AB \times PO}{PB} = \frac{4x}{\sqrt{x^2+9}}}$ (2)

5) Pour tout x de $\mathbb{R}^+$, $f(x) = \sqrt{16 - \frac{144}{x^2+9}} = \sqrt{\frac{16x^2 + 16 \times 9 - 144}{x^2+9}} = \frac{4x}{\sqrt{x^2+9}} = BH$ (1,5) ($x \geq 0$ donc $\sqrt{x^2} = x$)

6) Pour tous x_1, x_2 tels que $0 \leq x_1 < x_2$
la fonction carré est st croissante sur $\mathbb{R}^+$
donc $0 \leq x_1^2 < x_2^2$
donc $9 \leq x_1^2 + 9 < x_2^2 + 9$
la fonction inverse est st décroissante sur $\mathbb{R}^{*+}$
donc $\frac{1}{9} \geq \frac{1}{x_1^2+9} > \frac{1}{x_2^2+9}$
donc $16 \geq \frac{144}{x_1^2+9} > \frac{144}{x_2^2+9}$
donc $-16 \leq -\frac{144}{x_1^2+9} < -\frac{144}{x_2^2+9}$
donc $0 \leq 16 - \frac{144}{x_1^2+9} < 16 - \frac{144}{x_2^2+9}$
la fonction racine est st croissante sur $\mathbb{R}^+$
donc $\sqrt{16 - \frac{144}{x_1^2+9}} < \sqrt{16 - \frac{144}{x_2^2+9}}$
donc $f(x_1) < f(x_2)$ (3)
donc $\boxed{\text{f est strictement croissante sur } \mathbb{R}^+}$

x	0	+∞
f	0 ↗	

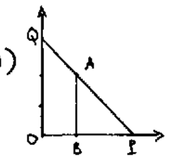
(0,5)



(1,5)

graphiquement On remarque que $\mathcal{C}_f$ est toujours située entre l'axe des abscisses et la droite d'équation y = 4 donc pour tout x de $\mathbb{R}^+$, $\boxed{0 \leq f(x) < 4}$
On retrouve donc bien le résultat de la question 2) (1,5)

II) 1) • par (H) $x_A = x_B$ donc (AB) // (OQ)
de plus Q, A et P sont alignés et O, B et P sont alignés
Donc d'après Thalès dans les triangles PAB et PQO, on a :
$\frac{BA}{OQ} = \frac{PB}{PO}$ donc $OQ = \frac{BA \times PO}{PB}$ (1)
de plus par (H), $x_P > 1$ donc OB et P sont alignés dans cet ordre
donc $PB + BO = PO$ donc $PB = PO - BO = x - 1$ (1)
donc $OQ = \frac{2 \times x}{x-1}$



• Pour tout x de]1 ; +∞[, $f(x) = \text{Aire}(OPQ) = \frac{OP \times OQ}{2}$ (1) (par (H) (OP) ⊥ (OQ))
$= \frac{x \times OQ}{2} = \frac{x^2}{x-1}$ (1)

2) Variations sur]1 ; 2]
Pour tous x_1, x_2 tels que $1 < x_1 < x_2 \leq 2$ déterminons le signe de $f(x_1) - f(x_2)$

$f(x_1) - f(x_2) = \frac{x_1^2}{x_1-1} - \frac{x_2^2}{x_2-1}$
$= \frac{x_1^2 x_2 - x_1^2 - x_1 x_2^2 + x_2^2}{(x_1-1)(x_2-1)}$
$= \frac{x_1 x_2 (x_1 - x_2) - (x_1 - x_2)(x_1 + x_2)}{(x_1-1)(x_2-1)}$
$= \frac{(x_1 - x_2)(x_1 x_2 - x_1 - x_2)}{(x_1-1)(x_2-1)}$

Or on remarque que pour tous x_1, x_2 de $\mathbb{R}$,
$(x_1-1)(x_2-1) - 1 = x_1 x_2 - x_1 - x_2 + \cancel{1} - \cancel{1}$ (3)
donc $f(x_1) - f(x_2) = \frac{(x_1 - x_2)((x_1-1)(x_2-1) - 1)}{(x_1-1)(x_2-1)}$

• par (H) $x_1 < x_2$ donc $\underline{x_1 - x_2 < 0}$
$x_1 > 1$ donc $\underline{x_1 - 1 > 0}$
$x_2 > 1$ donc $\underline{x_2 - 1 > 0}$
$1 < x_1 < 2$ donc $0 < x_1 - 1 < 1$
$1 < x_2 \leq 2$ donc $0 < x_2 - 1 \leq 1$
donc $(x_1-1)(x_2-1) < 1$
donc $\underline{(x_1-1)(x_2-1) - 1 < 0}$

Bilan $f(x_1) - f(x_2) > 0$ donc $\boxed{\text{f est st décroissante sur]1 ; 2]}}$ (1,5)

variations sur [2 ; +∞[
Pour tous x_1, x_2 tels que $2 \leq x_1 < x_2$
par (H) $x_1 < x_2$ donc $\underline{x_1 - x_2 < 0}$
$x_1 \geq 2$ donc $\underline{x_1 - 1 \geq 1}$
$x_2 > 2$ donc $\underline{x_2 - 1 > 1}$
et $(x_1-1)(x_2-1) > 1$
donc $\underline{(x_1-1)(x_2-1) - 1 > 0}$

Bilan $f(x_1) - f(x_2) < 0$ donc $\boxed{\text{f est st croissante sur [2 ; +∞[}}$ (1,5)

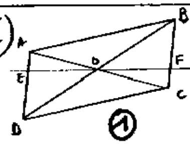
Tableau de variation :

x	1	2	+∞
f	‖ ↘	4	↗

(1)

3) D'après le tableau de variations de f, f admet son minimum en x = 2 sur]1 ; +∞[donc $\boxed{\text{P doit avoir pour abscisse 2}}$ pour que l'aire de OPQ soit la plus petite possible. (1)

III)



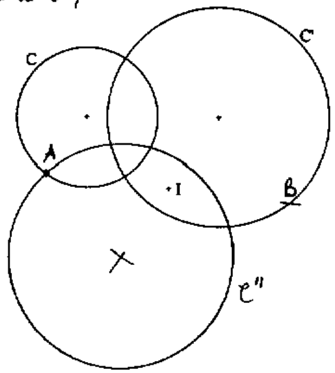
(1)

par (H) O est le milieu de [AC] et de [BD] donc par la symétrie de centre O, A a pour image C
D a pour image B
donc (AD) a pour image (BC)
de plus O appartenant à (OE) donc (OE) est invariante.

Bilan : E qui est l'intersection de (AD) et (OE) a pour image l'intersection de (BC) et (OE) c'est à dire F d'après les (H).
donc $\boxed{\text{O est aussi le milieu de [EF]}}$ (3)

IV) Par la symétrie de centre I, on construit l'image de $\mathcal{C}'$ que l'on appelera $\mathcal{C}''$
Appelons A l'une des deux intersections de $\mathcal{C}$ avec $\mathcal{C}''$ et B son image
A appartenant à $\mathcal{C}''$, son image B appartient donc à l'image de $\mathcal{C}''$, c'est à dire $\mathcal{C}'$

Bilan : $\boxed{A \in \mathcal{C} \text{ et } B \in \mathcal{C}'}$ (4)



V) • Manon a un animal à poils et elle n'aime pas les chats donc elle a le chien.
• Fabien a un animal à 4 pattes, ce n'est pas le chien, c'est donc le chat
• Nicolas a un oiseau : c'est donc le canari (4)
• Julien a donc le poisson rouge.

chien	chat	canari	poisson rouge
Manon	Fabien	Nicolas	Julien

2nde Composition 2h 12 I 2001 Corrigé succinct

I 1) $|x+1| > 3 \iff x+1 < -3$ ou $x+1 > 3 \iff x < -4$ ou $x > 2$ $\boxed{S =]-\infty ; -4[\cup]2 ; +\infty[}$ 2 2

2) $|x-2| + |4-2x| = 3 \iff |x-2| + 2|2-x| = 3 \iff 3|x-2| = 3 \iff |x-2| = 1 \iff x = 1$ ou $x = 3$ $\boxed{S = \{1 ; 3\}}$

3) Une valeur absolue est toujours positive ou nulle donc pour tout x de $\mathbb{R}$, $|x+5| \geq 0 > -2$ donc $\boxed{S = \mathbb{R}}$ 2 2

4) si $x \neq 2$ $\frac{x^2-4x+4}{|x-2|} > 0 \iff \frac{(x-2)^2}{|x-2|} > 0$ cette inégalité est tj vérifiée car un carré et une valeur absolue sont toujours positifs ou nuls et ici $(x-2)^2$ et $|x-2|$ sont non nuls car $x \neq 2$ $\boxed{S = \mathbb{R} - \{2\}}$

II 1) si $x \leq -\frac{1}{2}$ alors $\begin{cases} 2x+1 \leq 0 & \text{donc } |2x+1| = -2x-1 \\ x \leq 0 & \text{donc } |x| = -x \end{cases}$ et $f(x) = -2x-1-(-x) = \underline{-x-1}$ 1

si $-\frac{1}{2} \leq x \leq 0$ alors $\begin{cases} 2x+1 \geq 0 & \text{donc } |2x+1| = 2x+1 \\ x \leq 0 & \text{donc } |x| = -x \end{cases}$ et $f(x) = 2x+1-(-x) = \underline{3x+1}$ 1

si $x \geq 0$ alors $\begin{cases} 2x+1 \geq 0 & \text{donc } |2x+1| = 2x+1 \\ x \geq 0 & \text{donc } |x| = x \end{cases}$ et $f(x) = 2x+1-x = \underline{x+1}$ 1

3) a) $f(0) = |2 \times 0 + 1| - |0| = \boxed{1}$ 1

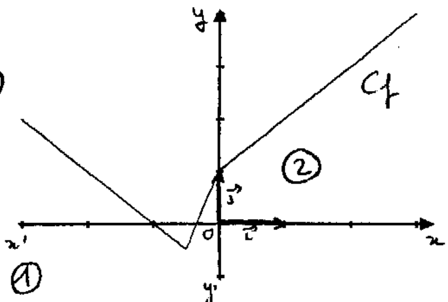
b) Résolvons $f(x) = 0$: d'après 1) :

si $x \leq -\frac{1}{2}$ alors $f(x) = 0 \iff -x-1 = 0 \iff x = -1$
or $-1 < -\frac{1}{2}$ donc -1 est solution

si $-\frac{1}{2} \leq x \leq 0$ alors $f(x) = 0 \iff 3x+1 = 0 \iff x = -\frac{1}{3}$
or $-\frac{1}{2} < -\frac{1}{3} < 0$ donc $-\frac{1}{3}$ est solution

si $x \geq 0$ alors $f(x) = 0 \iff x+1 = 0 \iff x = -1$
or $-1 < 0$ donc pas de solution sur $\mathbb{R}^+$

Bilan : On a deux antécédents : -1 et $-\frac{1}{3}$ 3



c) $f(\sqrt{2}) = |2\sqrt{2}+1| - |\sqrt{2}| = 2\sqrt{2}+1-\sqrt{2} = \boxed{\sqrt{2}+1}$ 1

4) D'après le graphique, il semble que f admette un minimum de $-\frac{1}{2}$ en $-\frac{1}{2}$ sur $\mathbb{R}$ 1

5) Pour tout x de $\mathbb{R}$, déterminons le signe de $f(x) - f(-\frac{1}{2})$: $f(-\frac{1}{2}) = |0| - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$

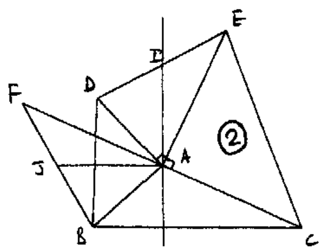
si $x \leq -\frac{1}{2}$ alors $f(x) - f(-\frac{1}{2}) = -x-1+\frac{1}{2} = -x-\frac{1}{2} \geq 0$

si $-\frac{1}{2} \leq x \leq 0$ alors $f(x) - f(-\frac{1}{2}) = 3x+1+\frac{1}{2} = 3x+\frac{3}{2} = 3(x+\frac{1}{2}) \geq 0$

si $x \geq 0$ alors $f(x) - f(-\frac{1}{2}) = x+1+\frac{1}{2} = x+\frac{3}{2} > 0$

donc pour tout x de $\mathbb{R}$, $f(x) - f(-\frac{1}{2}) \geq 0$ donc $\underline{f \text{ admet un minimum de } -\frac{1}{2} \text{ en } -\frac{1}{2} \text{ sur } \mathbb{R}}$ (cf 4!) 3

III



1) a) par (H), $\widehat{CAE} = 90°$ donc r est un quart de tour (de sens direct sur notre figure) 2
or par (H), $AB = AD$ et $\widehat{DAB} = 90°$ (rotation dans le bon sens) donc $\boxed{\text{D a pour image B par } r}$

b) F : On trace la perpendiculaire à (AE) passant par A et on y reporte la longueur AE en partant de A et en tournant dans le sens direct. 2
J : ——— (AI) ——— AI ———

2) a) par (H), $r(C) = E$, $r(E) = F$ et r est un quart de tour donc $\widehat{CAF} = 180°$ et C, A et F sont alignés. De plus, $AC = AE = AF$ Bilan : $\boxed{\text{A est le milieu de [FC]}}$ 2

b) d'après ce qui précède, $r(E) = F$, $r(I) = J$ et $r(D) = B$, donc, une rotation conservant les milieux, $\underline{\text{J est le milieu de [BF]}}$ or d'après 2a $\underline{\text{A est le milieu de [CF]}}$ donc d'après le théorème de la droite des milieux dans le triangle FBC, $\boxed{\text{(AJ) est parallèle à (BC)}}$ 4 et $AJ = \frac{1}{2} BC$

c) d'après b), $\begin{cases} AJ = \frac{1}{2} BC \\ (AJ) \parallel (BC) \end{cases}$ et par (H) $\begin{cases} AI = AJ \\ (AI) \perp (AJ) \end{cases}$ donc $\boxed{\begin{cases} AI = \frac{1}{2} BC \\ (AI) \perp (BC) \end{cases}}$ 2

IV Appelons E' le symétrique de E par rapport à (AB) et F' celui de F par rapport à (BC)
Une symétrie conservant les longueurs :

$M \in (AB)$ donc $E'M = EM$
$N \in (BC)$ donc $NF' = NF$
donc $EM + MN + NF = E'M + MN + NF'$

Or pour minimiser $E'M + MN + NF'$, il faut que E, M, N et F' soient alignés dans cet ordre.

Bilan : pour que $EM + MN + NF$ soit le plus petit possible,
$\boxed{\text{M doit être l'intersection de (E'F') et [AB] et N celle de (E'F') et [BC]}}$
2