2K DS du 2II09 1h corrigé succinct

I) 1) Déterminer $D_f$

$x \in D_f \iff x^2 \neq 0 \iff x \neq 0$ donc $\boxed{D_f = \mathbb{R}^*}$ (1)

2) Parité

Pour tout $x$ de $\mathbb{R}^*$, $-x$ appartient aussi à $\mathbb{R}^*$

et $f(-x) = (-x)^2 - \dfrac{1}{(-x)^2} = x^2 - \dfrac{1}{x^2} = f(x)$

donc $f$ est paire (1,5)

3) Variation sur $\mathbb{R}^{*+}$

Pour tous $x_1, x_2$ tq que $0 < x_1 < x_2$

déterminons le signe de $f(x_1) - f(x_2)$

$$f(x_1) - f(x_2) = x_1^2 - \frac{1}{x_1^2} - x_2^2 + \frac{1}{x_2^2}$$
$$= (x_1^2 - x_2^2) + \left(\frac{1}{x_2^2} - \frac{1}{x_1^2}\right)$$
$$= (x_1^2 - x_2^2) + \left(\frac{x_1^2 - x_2^2}{x_1^2 x_2^2}\right)$$
$$= (x_1 - x_2)(x_1 + x_2)\left(1 + \frac{1}{x_1^2 x_2^2}\right)$$

(4)

or par (H) $x_1 < x_2$ donc $x_1 - x_2 < 0$

$x_1 > 0$ et $x_2 > 0$ donc $x_1 + x_2 > 0$

de plus un carré est toujours positif donc $1 + \dfrac{1}{x_1^2 x_2^2} > 0$

Bilan : $f(x_1) - f(x_2) < 0$ donc $f(x_1) < f(x_2)$

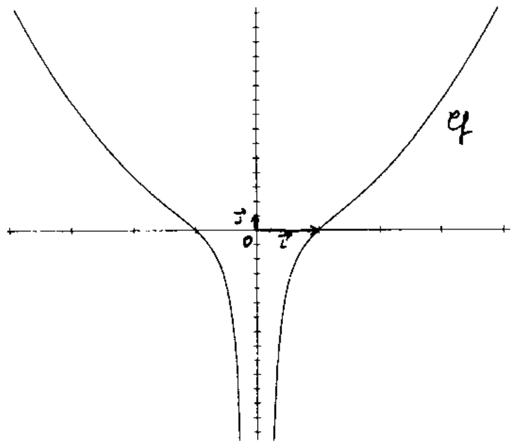
donc $f$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}^{*+}$ (4)

Tableau de variation

$f$ étant paire, on en déduit ses variations sur $\mathbb{R}^*$ tout entier :

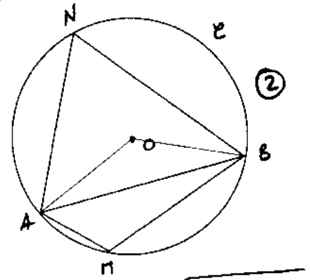
| $x$ | $-\infty$ | | 0 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f$ | | ↘ | ‖ | ↗ | |

(1,5)




(6)

I)

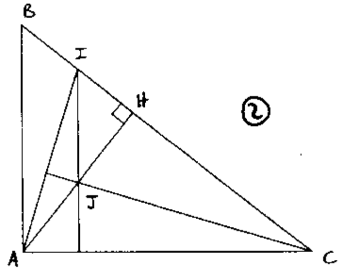



(2)

Montrer que : $\widehat{AMB} + \widehat{ANB} = 180°$

- Par (H) $\widehat{AMB}$ est inscrit dans $\mathcal{C}$ et $\widehat{AOB}$ est son angle au centre associé donc $\widehat{AMB} = \frac{1}{2}\widehat{AOB}$
- Par (H) $\widehat{ANB}$ est inscrit dans $\mathcal{C}$ et $\widehat{AOB}$ est son angle au centre associé donc $\widehat{ANB} = \frac{1}{2}\widehat{AOB}$
- Bilan : $\boxed{\widehat{AMB} + \widehat{ANB}} = \frac{1}{2}(\widehat{AOB} + \widehat{AOB}) = \frac{1}{2} \times 360 = \boxed{180°}$ (6)

III)




(2)

1) Montrer que : $(IJ) \parallel (AB)$

Considérons le triangle ABH :

Par (H) I est le milieu de [BH] et J celui de [AH]

donc d'après le théorème de la droite des milieux

on a : $\boxed{(IJ) \parallel (AB)}$ (4)

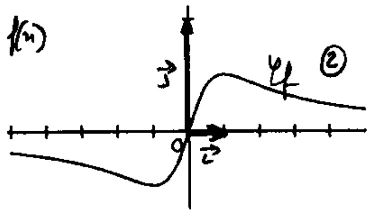
2) Montrer que : $(CJ) \perp (AI)$

- Par (H) le triangle ABC est rectangle en A donc $(AB) \perp (AC)$
  or d'après 1) $(AB) \parallel (IJ)$
  donc $(IJ) \perp (AC)$
  donc (IJ) est la hauteur du triangle AIC issue de I
- Par (H), H est le pied de la hauteur issue de A dans le triangle ABC
  donc (AH) est aussi la hauteur issue de A dans le triangle AIC
- Or (IJ) et (AH) qui sont deux hauteurs du triangle AIC se coupent par H en J
  donc J est l'orthocentre de AIC
  donc (CJ) est la 3ème hauteur de ce triangle
  donc $\boxed{(CJ) \perp (AI)}$ (8)

2K DS du 12/II/07 55 minutes Corrigé succinct

I) 1) Parité : Pour tout $x$ de $\mathbb{R}$, $-x$ appartient aussi à $\mathbb{R}$ et $f(-x) = \frac{-x}{1+(-x)^2} = -\frac{x}{1+x^2} = -f(x)$

donc $\boxed{f \text{ est impaire}}$ ①




2) Maximum en $x = 1$ : Pour tout $x$ de $\mathbb{R}$, déterminons le signe de $f(x) - f(1)$ :

$$f(x) - f(1) = \frac{x}{1+x^2} - \frac{1}{1+1} = \frac{x}{1+x^2} - \frac{1}{2} = \frac{2x-1-x^2}{2(1+x^2)} = \frac{-(x^2-2x+1)}{2(1+x^2)} = -\frac{(x-1)^2}{2(1+x^2)}$$

or un carré est toujours positif ou nul donc $(x-1)^2 \geq 0$ et $1+x^2 > 0$

donc $f(x) - f(1) \leq 0$ donc $f(x) \leq f(1)$ [avec $f(1) = \frac{1}{2}$] donc $\boxed{f \text{ admet un maximum de } \frac{1}{2} \text{ en } 1 \text{ sur } \mathbb{R}}$ ②

3) Variations sur $[0;1]$

Pour tous $x_1, x_2$ tels que $0 \leq x_1 < x_2 \leq 1$

déterminons le signe de $f(x_1) - f(x_2)$ :

$$f(x_1) - f(x_2) = \frac{x_1}{1+x_1^2} - \frac{x_2}{1+x_2^2} = \frac{x_1(1+x_2^2) - x_2(1+x_1^2)}{(1+x_1^2)(1+x_2^2)}$$

$$= \frac{x_1 + x_1x_2^2 - x_2 - x_1^2x_2}{(1+x_1^2)(1+x_2^2)} = \frac{(x_1-x_2) - x_1x_2(x_1-x_2)}{(1+x_1^2)(1+x_2^2)}$$

$$= \frac{(x_1-x_2)(1-x_1x_2)}{(1+x_1^2)(1+x_2^2)}$$ ②

or par (H), $x_1 < x_2$ donc $\underline{x_1 - x_2 < 0}$

$0 \leq x_1 < 1$ et $0 < x_2 \leq 1$ donc $0 \leq x_1x_2 < 1$

donc $\underline{1 - x_1x_2 > 0}$

et un carré étant toujours positif, $\underline{1+x_1^2 > 0}$ et $\underline{1+x_2^2 > 0}$

Bilan : $f(x_1) - f(x_2) < 0$ donc $f(x_1) < f(x_2)$

et $\boxed{f \text{ est strictement croissante sur } [0;1]}$ ②

Variations sur $[1;+\infty[$

Pour tous $x_1, x_2$ tels que $1 \leq x_1 < x_2$

déterminons le signe de $f(x_1) - f(x_2)$ :

$$f(x_1) - f(x_2) = \frac{(x_1-x_2)(1-x_1x_2)}{(1+x_1^2)(1+x_2^2)}$$

or par (H) $x_1 < x_2$ donc $\underline{x_1 - x_2 < 0}$

$1 \leq x_1$ et $1 < x_2$ donc $1 < x_1x_2$ donc $\underline{1 - x_1x_2 < 0}$

et un carré étant toujours positif, $\underline{1+x_1^2 > 0}$ et $\underline{1+x_2^2 > 0}$

Bilan : $f(x_1) - f(x_2) > 0$ donc $f(x_1) > f(x_2)$

et $\boxed{f \text{ est strictement décroissante sur } [1;+\infty[}$ ②

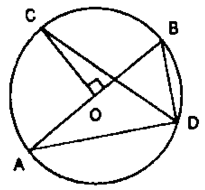
Tableau de variations :

$f$ étant impaire, on en déduit ses variations sur $\mathbb{R}$ tout entier

| $x$ | $-\infty$ | | $-1$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f$ | | ↘ | $-\frac{1}{2}$ | ↗ | $\frac{1}{2}$ | ↘ | |

①

II)




Bissectrice de $\widehat{ADB}$ :

Par (H) $\widehat{ADC}$ est inscrit dans $\mathscr{C}$ et $\widehat{AOC}$ est son angle au centre associé

donc $\widehat{ADC} = \frac{1}{2}\widehat{AOC} = \frac{1}{2} \times 90 = 45°$

Par (H) $\widehat{CDB}$ est inscrit dans $\mathscr{C}$ et $\widehat{COB}$ est son angle au centre associé

donc $\widehat{CDB} = \frac{1}{2}\widehat{COB} = \frac{1}{2} \times 90 = 45°$

Bilan : $\widehat{ADC} = \widehat{CDB}$ donc $\boxed{[DC) \text{ est bien la médiatrice de } \widehat{ADB}}$ ④

III) Variations sur $\mathbb{R}^+$ :

Pour tous $m, x_1, x_2$ tels que $0 \leq x_1 < x_2$ et $m \neq 0$

déterminons le signe de $f(x_1) - f(x_2)$ :

$$f(x_1) - f(x_2) = (mx_1)^2 + 4m^2x_1 - \cancel{5m} - (mx_2)^2 - 4m^2x_2 + \cancel{5m}$$

$$= m^2x_1^2 + 4m^2x_1 - m^2x_2^2 - 4m^2x_2$$

$$= m^2(x_1^2 - x_2^2) + 4m^2(x_1 - x_2)$$

$$= m^2(x_1-x_2)(x_1+x_2) + 4m^2(x_1-x_2)$$

$$= m^2(x_1-x_2)(x_1+x_2+4)$$ ②

Or un carré est toujours positif et par (H) $m \neq 0$ donc $\underline{m^2 > 0}$

Par (H) $x_1 < x_2$ donc $\underline{x_1 - x_2 < 0}$

$x_1 \geq 0$ et $x_2 > 0$ donc $x_1 + x_2 > 0$ donc $\underline{x_1 + x_2 + 4 > 0}$

Bilan $f(x_1) - f(x_2) < 0$ donc $f(x_1) < f(x_2)$

donc $\boxed{f \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R}^+}$ 1,5

Tableau de variations :

| $x$ | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f$ | $-5m$ | ↗ | |

0,5

2DS DS du 6 III 03 2$^{n}$ corrigé succinct

I) 1) $2x_A - 4 = -10 \neq y_A$ donc $\boxed{A \notin d}$ (1) ; $2x_B - 4 = -6 = y_B$ donc $\boxed{B \in d}$ (1) ; $2x_C - 4 \ldots = 2\sqrt{2}+14$ or $y_C = \ldots = 2\sqrt{2}+14$ donc $\boxed{C \in d}$ (2)

2) d et d' sont parallèles non verticales : elles ont donc le même coefficient directeur, d' a donc une équation de la forme $y = 2x + b$ ($b \in \mathbb{R}$)
or $D(1,1) \in d'$ donc $y_D = 2x_D + b$ donc $1 = 2 + b$ donc $b = -1$ $\boxed{d' \text{ a pour équation } y = 2x - 1}$ (2)

II) 1) Pour tout x de Df centré en 0, $f(-x) = \frac{(-x)^2+1}{(-x)^2-1} = \frac{x^2+1}{x^2-1} = f(x)$ donc $\boxed{f \text{ est paire}}$ et nous n'étudierons ses variations que sur $\mathbb{R}^+ - \{1\}$ (2)

2) pour tout x tel que $-1 < x < 1$, déterminons le signe de $f(x) - f(0)$ : $f(x) - f(0) = \frac{x^2+1}{x^2-1} + 1 = \frac{x^2+1+x^2-1}{x^2-1} = \frac{2x^2}{(x-1)(x+1)}$

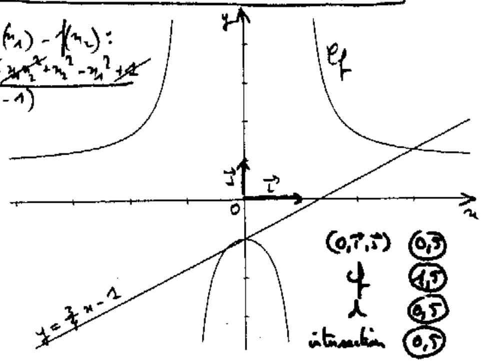
or un carré est toujours positif ou nul donc $2x^2 \geq 0$
par (H) $x < 1$ donc $x - 1 < 0$
$x > -1$ donc $x + 1 > 0$

Bilan : $f(x) - f(0) \leq 0$ donc $f(x) \leq f(0)$ avec $f(0) = -1$
donc $\boxed{f \text{ admet un maximum de } -1 \text{ en } 0 \text{ sur } ]-1;1[}$ (3)

3) ~~sur [0;1[~~ : pour tous $x_1, x_2$ tels que $0 \leq x_1 < x_2 < 1$, déterminons le signe de $f(x_1) - f(x_2)$ :

$f(x_1) - f(x_2) = \frac{x_1^2+1}{x_1^2-1} - \frac{x_2^2+1}{x_2^2-1} = \frac{(x_1^2+1)(x_2^2-1)-(x_2^2+1)(x_1^2-1)}{(x_1^2-1)(x_2^2-1)} = \frac{\cancel{x_1^2x_2^2}+x_2^2-x_1^2\cancel{-1}-\cancel{x_1^2x_2^2}+x_2^2-x_1^2\cancel{+1}}{(x_1^2-1)(x_2^2-1)}$

$= \frac{2(x_2-x_1)(x_2+x_1)}{(x_1-1)(x_1+1)(x_2-1)(x_2+1)}$ (3)




or par (H) $x_1 < x_2$ donc $x_2 - x_1 > 0$
$x_1 \geq 0$ et $x_2 > 0$ donc $x_1 + x_2 > 0$
$x_1 \geq 0$ donc $x_1 + 1 > 0$
$x_1 < 1$ donc $x_1 - 1 < 0$
$x_2 > 0$ donc $x_2 + 1 > 0$
$x_2 < 1$ donc $x_2 - 1 < 0$

Bilan $f(x_1) - f(x_2) > 0$
donc $f(x_1) > f(x_2)$
donc $\boxed{f \text{ est strictement décroissante sur } [0;1[}$ (3)

sur $]1;+\infty[$ : pour tous $x_1, x_2$ tels que $1 < x_1 < x_2$, déterminons le signe de $f(x_1) - f(x_2)$ : $f(x_1) - f(x_2) = \frac{2(x_2-x_1)(x_1+x_2)}{(x_1-1)(x_1+1)(x_2-1)(x_2+1)}$

or par (H) $x_1 < x_2$ donc $x_2 - x_1 > 0$
$x_1 > 0$ et $x_2 > 0$ donc $x_1 + x_2 > 0$
$x_1 > 0$ donc $x_1 + 1 > 0$ | $x_2 > 0$ donc $x_2 + 1 > 0$
$x_1 > 1$ donc $x_1 - 1 > 0$ | $x_2 > 1$ donc $x_2 - 1 > 0$

Bilan $f(x_1) - f(x_2) > 0$
donc $f(x_1) > f(x_2)$
donc $\boxed{f \text{ est décroissante sur } ]1;+\infty[}$ (3)

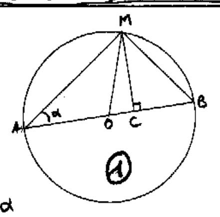
f étant paire, nous en déduisons ses variations sur Df tout entier :

| x | $-\infty$ | | $-1$ | | $0$ | | $1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f | | ↗ | ‖ | ↗ | $-1$ | ↘ | ‖ | ↘ | |

(2) (2)

5) les solutions sont les abscisses des points de $\mathcal{C}_f$ situés au dessus de la droite d'éq $y = \frac{3}{4}x - 1$ donc $\boxed{S = ]-\infty;-1[ \cup [\alpha;0] \cup ]1;3]}$ avec $\alpha \approx -0,3$

III) 1) par (H) le triangle AMC est rectangle en C donc $\cos \widehat{MAC} = \frac{AC}{AM}$
par (H) M appartenant au cercle $\mathcal{C}$ de diamètre [AB] donc le triangle AMB est rectangle en M donc $\cos \widehat{MAB} = \frac{AM}{AB}$
Bilan, comme $\widehat{MAC} = \widehat{MAB} = \alpha$, on a : $\boxed{\cos \alpha = \frac{AC}{AM} = \frac{AM}{AB}}$ (3)

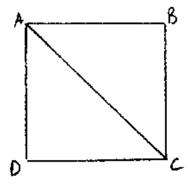



2) • si $\alpha \in [0;45]$ alors M est plus près de B que de A et $O \in [AC]$ donc $AC = AO + OC$
• par (H) $\widehat{MAB}$ est un angle inscrit dans $\mathcal{C}$ et $\widehat{MOB}$ est son angle au centre associé donc $\widehat{MOB} = 2\widehat{MAB} = 2\alpha$
• d'après les (H) le triangle MOC est rectangle en C donc $\cos \widehat{MOC} = \frac{OC}{OM} = \frac{OC}{1} = OC$ (3)
• Bilan $\widehat{MOC} = \widehat{MOB} = 2\alpha$ donc $\cos 2\alpha = OC$ et de plus $AO = 1$ donc $AO + OC = 1 + \cos 2\alpha$ donc $\boxed{AC = 1 + \cos 2\alpha}$

3) d'après 1) $\cos^2 \alpha = \cos \alpha \times \cos \alpha = \frac{AC}{\cancel{AM}} \times \frac{\cancel{AM}}{AB} = \frac{AC}{AB}$
d'après 2) $AC = 1 + \cos 2\alpha$ si $\alpha \in [0;45]$
donc $\boxed{\cos^2 \alpha} = \frac{AC}{AB} = \boxed{\frac{1+\cos 2\alpha}{2}}$ si $\alpha \in [0;45]$ (3)

4) $15 \in [0;45]$ donc d'après 3) $\cos^2 15 = \frac{1+\cos(2\times15)}{2} = \frac{1+\cos 30}{2} = \frac{1+\frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{2+\sqrt{3}}{4}$
donc $\cos 15 = \sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{4}} = \boxed{\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}}$ $\left(\cos 15 \neq -\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{4}} \text{ car } \cos 15 \geq 0\right)$ (3)

IV) • Appelons t le temps que met le 1er point pour parcourir un côté du carré
ce point sera alors en C aux instants : 2t, 6t, 10t, 14t, ….. $(2+4n)t$, … ($n \in \mathbb{N}$)
de même il sera en A aux instants : 4t, 8t, 12t, 16t, ….. $(4n)t$, …



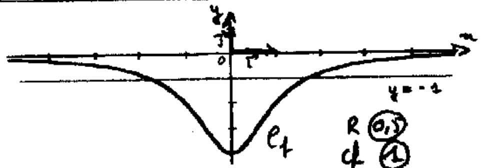

• D'après Pythagore dans le triangle ABC rectangle en B, on a $AC^2 = AB^2 + BC^2 = 2AB^2$
donc $AC = \sqrt{2} \times AB$ ($AC \neq -\sqrt{2}AB$ car AC et AB sont des longueurs positives)
donc le 2d point met $\sqrt{2} \times t$ pour parcourir la diagonale du carré.
ce point sera alors en C aux instants : $\sqrt{2}t$, $3\sqrt{2}t$, $5\sqrt{2}t$, $7\sqrt{2}t$, ….. $(2n'+1)\sqrt{2}t$, … ($n' \in \mathbb{N}$) (4)
de même il sera en A aux instants : $2\sqrt{2}t$, $4\sqrt{2}t$, $6\sqrt{2}t$, $8\sqrt{2}t$, ….. $2n'\sqrt{2}t$, …

• Bilan les 2 points se rencontreront en A si et seulement si $4nt = 2n'\sqrt{2}t \iff \frac{n'}{n} = \sqrt{2}$
les 2 points se rencontreront en C si et seulement si $(2+4n)t = (2n'+1)\sqrt{2}t \iff \frac{2+4n}{2n'+1} = \sqrt{2}$
Dans les deux cas on aboutit à une impossibilité puisque $\sqrt{2}$ étant irrationnel, il ne peut être mis sous la forme d'un quotient d'entiers.

2DJ Composition du 14 II 02 — $2^h$ — Corrigé succinct

I) 1) Pour tout $x$ de $\mathbb{R}$, déterminons le signe de $f(x) - f(0)$ :

$f(x) - f(0) = \frac{-4}{x^2+1} - (-4) = -4\left(\frac{1 - x^2 - 1}{x^2+1}\right) = \frac{4x^2}{x^2+1}$




R (0,5) $C_f$ (1) y = -1 (0,5)

or un carré est toujours positif ou nul donc $x^2 \geq 0$ et $x^2 + 1 > 0$

donc $f(x) - f(0) \geq 0$ et $f$ admet un minimum de $-4$ en 0 sur $\mathbb{R}$ (2)

2) <u>variations sur $\mathbb{R}^-$</u> :

pour tous $x_1, x_2$ tels que $x_1 < x_2 \leq 0$, déterminons le signe de $f(x_1) - f(x_2)$

$f(x_1) - f(x_2) = \frac{-4}{x_1^2+1} + \frac{4}{x_2^2+1} = \frac{4(x_1^2 + 1 - x_2^2 - 1)}{(x_1^2+1)(x_2^2+1)} = \frac{4(x_1 - x_2)(x_1 + x_2)}{(x_1^2+1)(x_2^2+1)}$ (2)

or par (H) $x_1 < x_2$ donc $x_1 - x_2 < 0$

$x_1 < 0$, $x_2 \leq 0$ donc $x_1 + x_2 < 0$

de plus un carré est toujours positif donc le dénominateur est positif.

Bilan $f(x_1) - f(x_2) > 0$ et $f$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^-$ (1,5)

<u>variation sur $\mathbb{R}^+$</u> :

pour tous $x_1, x_2$ tels que $0 \leq x_1 < x_2$, déterminons...

$f(x_1) - f(x_2) = \frac{4(x_1 - x_2)(x_1 + x_2)}{(x_1^2+1)(x_2^2+1)}$

or par (H) $x_1 < x_2$ donc $x_1 - x_2 < 0$

$x_1 \geq 0$, $x_2 > 0$ donc $x_1 + x_2 > 0$

et un carré étant toujours positif le dénominateur l'est aussi

Bilan $f(x_1) - f(x_2) < 0$ et $f$ est croissante sur $\mathbb{R}^+$ (1,5)

<u>tableau de variations</u> :

| $x$ | $-\infty$ | 0 | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f$ | ↘ | $-4$ | ↗ |

(1)

3) $f(x) < -1 \iff \frac{-4}{x^2+1} < -1$

$\iff -4 < -(x^2+1)$

$\iff x^2 - 3 < 0$

$\iff (x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3}) < 0$ (2)

par déf. vi car $x^2+1$ est toujours positif

on a multiplié les 2 termes de l'inégalité par $x^2+1$ qui est strictement positif !

| $x$ | $-\infty$ | | $-\sqrt{3}$ | | $\sqrt{3}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x - \sqrt{3}$ | | $-$ | | $-$ | 0 | $+$ | |
| $x + \sqrt{3}$ | | $-$ | 0 | $+$ | | $+$ | |
| produit | | $+$ | 0 | $-$ | 0 | $+$ | |

$\boxed{S = ]-\sqrt{3}\,;\sqrt{3}[}$ (2)

4) les solutions de l'inéquation sont les abscisses des pts de $C_f$ situés en dessous de la droite d'éq $y = -1$

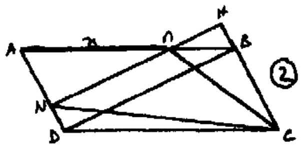
soit $S = ]-\alpha\,;\alpha[$ avec $\alpha \approx 1{,}7$. Ce résultat est cohérent avec celui de la question précédente ! (2)

II) 1) par (H) $(CH) \perp (NH)$ donc $(HB) \perp (HN)$

$(DB) \perp (AD)$ donc $(DB) \perp (ND)$

par (H) $(BC) // (AD)$ et $(AD) \perp (DB)$ donc $(HB) \perp (DB)$ (2)

Donc BDNH a 3 angles droits et est $\boxed{\text{un rectangle}}$




(2)

2) (a) par (H) le triangle ABD est rectangle en D donc d'après Pythagore : $AB^2 = AD^2 + BD^2$

donc $BD^2 = 64 - 16 = 48$ donc $BD = \sqrt{48} = 4\sqrt{3}$ ($BD \neq -\sqrt{48}$ car c'est une longueur) (2)

• or par (H) A, M, B sont alignés, A, N, D sont alignés, $(MN) // (BD)$ donc d'après Thalès dans AMN et ABD, on a :

$\frac{AM}{AB} = \frac{MN}{BD} \left(= \frac{AN}{AD}\right)$ donc $\frac{x}{8} = \frac{MN}{4\sqrt{3}}$ donc $MN = \frac{4x\sqrt{3}}{8} = \boxed{\frac{\sqrt{3}}{2}x = f(x)}$ (2)

(b) Dans le (a), Thalès permet également d'écrire $\frac{AN}{AD} = \frac{AM}{AB}$ donc $\frac{AN}{4} = \frac{x}{8}$ donc $AN = \frac{1}{2}x$ (1)

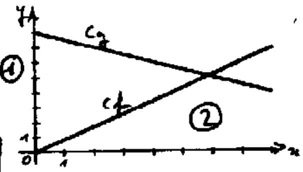
or $N \in [AD]$ donc $ND = AD - AN = 4 - \frac{1}{2}x$. Or d'après 1) BDNH est un rectangle donc $HB = ND = 4 - \frac{1}{2}x$

or $B \in [HC]$ donc $CH = CB + HB = 4 + (4 - \frac{1}{2}x) = \boxed{8 - \frac{1}{2}x = g(x)}$ (2)

3) (a) par (H) $x \in [0;8]$ donc $f$ et $g$ sont deux fonctions affines définies sur $[0;8]$ (1)

$f : x \mapsto \frac{\sqrt{3}}{2}x$ le coefficient devant $x$ est positif donc $f$ est croissante sur $[0;8]$

$g : x \mapsto 8 - \frac{1}{2}x$ ——— négatif ——— $g$ ——— décroissante sur $[0;8]$ (2)




(2)

(b) $MN = CH \iff f(x) = g(x)$ : les solutions sont les abscisses des pts d'intersection de $C_f$ avec $C_g$ : $\boxed{S = \{\alpha\} \text{ avec } \alpha \approx 5{,}8}$

III $\widehat{NBC} = \widehat{NBA} + \widehat{ABC}$

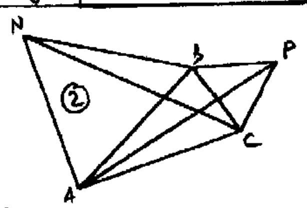
$= 60° + \widehat{ABC}$ (car par (H) NBA est équilatéral)

$\widehat{ABP} = \widehat{ABC} + \widehat{CBP}$

$= \widehat{ABC} + 60°$ (car par (H) CBP est équilatéral)

donc $\widehat{NBC} = \widehat{ABP}$

or par (H), $NB = AB$ et $BC = BP$




(2)

Or si deux triangles ont un de leurs angles et les 2 côtés adjacents égaux deux à deux, ils sont isométriques

donc NBC et ABP sont isométriques

donc les deux derniers côtés CN et AP sont égaux : $\boxed{CN = AP}$ (4)

$2^{IJ}$ 24X00 Composition $2^h$ Corrigé succinct

I Pour tous x, y tels que $x \neq 0$, $y \neq 0$ et $x \neq -y$, on a :

$$A = \frac{1}{(x+y)^2}\left(\frac{x^2+y^2}{x^2y^2}\right) + \frac{2\times(x+y)}{(x+y)^3\times xy} = \frac{x^2+y^2}{(x+y)^2(xy)^2} + \frac{2xy}{(x+y)^2(xy)^2} = \frac{x^2+2xy+y^2}{(x+y)^2(xy)^2} = \frac{(x+y)^2}{(x+y)^2(xy)^2} = \boxed{\frac{1}{(xy)^2}}$$ (4)

II 1) a) $P(x)=0 \Leftrightarrow 3(x^2+\frac{5}{3}x-\frac{2}{3})=0 \Leftrightarrow 3\left[(x+\frac{5}{6})^2-\frac{25}{36}-\frac{24}{36}\right]=0 \Leftrightarrow 3\left[(x+\frac{5}{6})^2-(\frac{7}{6})^2\right] \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow x=\frac{1}{3}$ ou $x=-2$ $\boxed{S=\{-2;\frac{1}{3}\}}$ (2)
(AB = 0 ⇔ A = 0 ou B = 0)

b) valeurs interdites : $P(x)\neq 0 \Leftrightarrow \boxed{x\neq -2 \text{ et } x\neq \frac{1}{3}}$ (cf a) (0,5)

$\frac{x^2+4x+4}{P(x)}=0 \Leftrightarrow x^2+4x+4=0 \Leftrightarrow (x+2)^2=0 \Leftrightarrow x=-2$ $\boxed{S=\emptyset}$ (1,5)
(si $B\neq 0$ alors $\frac{A}{B}=0 \Leftrightarrow A=0$) (or $-2$ est une valeur interdite)

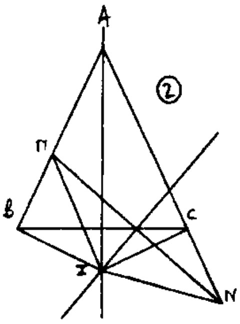
2) a) Pour tous réels a et b, on a : $(a-b)(a^2+ab+b^2) = a^3-\cancel{ba^2}+\cancel{a^2b}-\cancel{ab^2}+\cancel{ab^2}-b^3 = \boxed{a^3-b^3}$ (1)
donc pour tout x de $\mathbb{R}$, $x^3-27 = x^3-3^3 = \boxed{(x-3)(x^2+3x+9)}$ (1)

b) Pour tout x de $\mathbb{R}$, $3(x^3-27)-4(x^2-9)-17(x-3) = 3x^3-81-4x^2+36-17x+51 = 3x^3-4x^2-17x+6 = \boxed{Q(x)}$ (1)
donc $Q(x) = 3(x-3)(x^2+3x+9)-4(x-3)(x+3)-17(x-3) = (x-3)(3x^2+9x+27-4x-12-17) = (x-3)(3x^2+5x-2)$
$= (x-3)P(x) = \boxed{3(x-3)(x-\frac{1}{3})(x+2)}$ (1)

c) d'après b), $Q(x)=0 \Leftrightarrow 3(x-3)(x-\frac{1}{3})(x+2)=0 \Leftrightarrow x=3$ ou $x=\frac{1}{3}$ ou $x=-2$ $\boxed{S=\{-2;\frac{1}{3};3\}}$ (2)
(AB = 0 ⇔ A = 0 ou B = 0)

d) d'après b), $Q(x)=P(x) \Leftrightarrow (x-3)P(x)=P(x) \Leftrightarrow (x-3)P(x)-P(x)=0 \Leftrightarrow P(x)(x-3-1)=0 \Leftrightarrow P(x)(x-4)=0$
$\Leftrightarrow 3(x-\frac{1}{3})(x+2)(x-4)=0 \Leftrightarrow x=\frac{1}{3}$ ou $x=-2$ ou $x=4$ $\boxed{S=\{-2;\frac{1}{3};4\}}$ (2)
(AB = 0 ⇔ A = 0 ou B = 0)

III




1) par (H), $\widehat{IBC}$ et $\widehat{CBA}$ sont complémentaires donc $\widehat{IBC} = 90-\widehat{CBA}$
$\widehat{ICB}$ et $\widehat{BCA}$ ———— $\widehat{ICB} = 90-\widehat{BCA}$
or par (H), ABC est isocèle en A donc $\widehat{CBA}=\widehat{BCA}$

Bilan, $\widehat{IBC}=\widehat{ICB}$ donc IBC est isocèle en I donc IB = IC donc $\boxed{\text{I appartient à la médiatrice de [BC]}}$ (4)

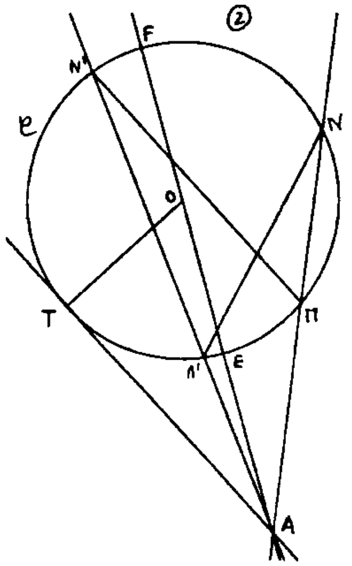
2) par (H) $\widehat{IBM} = 90° = \widehat{ICN}$
d'après 1) IB = IC
par (H) BM = CN

Donc 2 côtés de IBM sont respectivement égaux à 2 côtés de ICN et les angles compris entre ces côtés sont égaux donc $\boxed{\text{IBM et ICN sont isométriques}}$ (3)

Dans les deux triangles isométriques IBM et ICN, on a par (H) $\widehat{IBM}=\widehat{ICN}$ donc les côtés opposés à ces deux angles sont égaux : IM = IN et donc $\boxed{\text{I appartient à la médiatrice de [MN]}}$ (3)

IV 1) Par (H), $\widehat{MAN'}=\widehat{NAM'}$
De plus les angles $\widehat{MNM'}$ et $\widehat{MN'M'}$ sont inscrits dans $\mathcal{C}$ et interceptent le même arc $\widehat{MM'}$ donc $\widehat{MNM'}=\widehat{MN'M'}$ et $\widehat{ANM'}=\widehat{AN'A}$

Bilan 2 angles de AMN' sont respectivement égaux à 2 angles de AM'N
donc $\boxed{\text{AMN' et AM'N sont semblables}}$ (2)




2) Dans les triangles semblables AMN' et AM'N :
• d'après 1) $\widehat{MN'A}=\widehat{ANM'}$ donc les côtés qui leurs sont opposés, AM et AM' se correspondent.
• de plus par (H), $\widehat{MAN'}=\widehat{NAM'}$ donc les $3^{\text{ème}}$ angles de ces triangles sont égaux deux à deux : $\widehat{AMN'}=\widehat{AM'N}$ et les côtés qui leur sont opposés, AN' et AN se correspondent.

Bilan $\frac{AM}{AM'}=\frac{AN'}{AN}$ et donc $\boxed{AM\times AN = AM'\times AN'}$ (2)

3) la relation du 2) est vraie pour n'importe quelle droite passant par A et coupant le cercle donc elle est aussi vraie pour le diamètre passant par A et qui coupe le cercle en E et F :
$\boxed{AM\times AN = AE\times AF}$ (2)

par (H), A, E, O et F sont alignés dans cet ordre donc $AE = AO-OE = AO-R$ et $AF = AO+OF = AO+R$
donc $AE\times AF = (AO-R)(AO+R) \boxed{= AO^2-R^2}$ (2)

4) (AT) étant par (H) tangente au cercle, (AT) est perpendiculaire au cercle et le triangle ATO est rectangle en T donc Pythagore permet d'écrire : $AO^2 = OT^2+TA^2 = R^2+AT^2$ ou encore $AT^2 = AO^2-R^2$
or d'après 3), $AO^2-R^2 = AM\times AN$ Bilan $\boxed{AM\times AN = AT^2}$ (2)