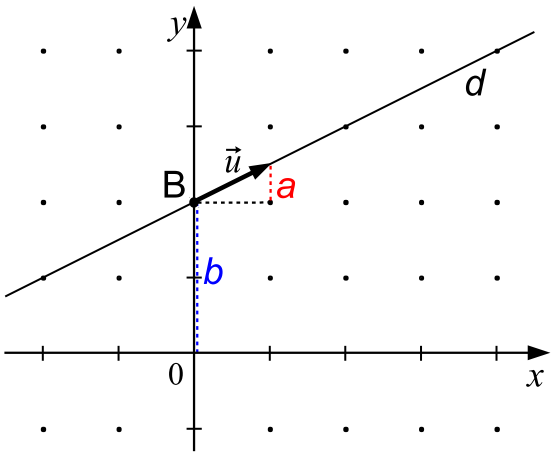
ÉQUATIONS DE DROITES

I) DROITES « NON VERTICALES »

Soit d une droite quelconque, <u>non parallèle à l'axe des ordonnées</u>.
Cette droite coupe donc l'axe des ordonnées en un point que l'on appellera B et elle a un vecteur directeur d'abscisse 1 que l'on appellera $\vec{u}$.

Appelons b l'ordonnée du point B et a celle de $\vec{u}$. On a : $B(0\,;\,b)$ et $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\a\end{pmatrix}$



Soit $M(x\,;\,y)$ un point quelconque du plan.

$$M(x\,;\,y) \in d \iff \overrightarrow{BM}\begin{pmatrix}x-0\\y-b\end{pmatrix} \text{ est colinéaire à } \vec{u}\begin{pmatrix}1\\a\end{pmatrix}$$

$$\iff \text{il existe un réel } k \text{ tel que } \begin{cases} x-0=k\times 1\\ y-b=k\times a\end{cases}$$

$$\iff \text{il existe un réel } k \text{ tel que } \begin{cases} x=k\\ y-b=x\times a\end{cases}$$

$$\iff y-b=a\,x$$

$$\iff y=a\,x+b$$

Conclusion

- Toute droite non verticale a donc une équation de la forme $y = a\,x + b$ et est la représentation graphique d'une fonction affine.
- b est l'ordonnée du point de d d'abscisse 0.
  On l'appelle « ordonnée à l'origine » de la droite d.
- a caractérise la direction de la droite d.
  On l'appelle « coefficient directeur » de d.
- Deux droites non verticales sont donc parallèles si et seulement si elles ont le même coefficient directeur.
- P et Q étant deux points distincts de d, déterminons $\dfrac{y_Q - y_P}{x_Q - x_P}$:

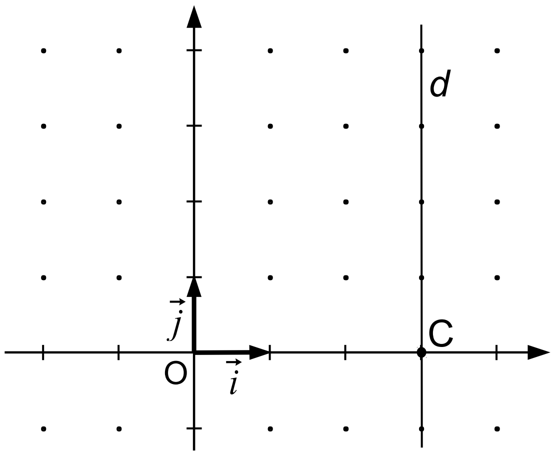
  d n'est pas verticale donc $x_Q \neq x_P$ et :

$$\frac{y_Q - y_P}{x_Q - x_P} = \frac{a\,x_Q + b - (a\,x_P + b)}{x_Q - x_P} = \frac{a\,x_Q - a\,x_P}{x_Q - x_P} = \frac{a(x_Q - x_P)}{x_Q - x_P} = a$$

2-geometrie-analytique-droite1.html
2-geometrie-analytique-droite2.html
p275 : 63, 66
p276 : 71, 78
p277 : <u>85</u>

II) DROITES « VERTICALES »

Soit d une droite parallèle à l'axe des ordonnées quelconque, on ne peut alors définir ni le point B, ni le vecteur $\vec{u}$ du paragraphe précédent !
Appelons C le point d'intersection de d avec l'axe des abscisses et posons $x_c = c$.



Soit $M(x\,;y)$ un point quelconque du plan.

$M(x\,;y) \in d \iff \overrightarrow{CM}\begin{pmatrix} x-c \\ y-0 \end{pmatrix}$ est colinéaire à $\vec{j}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\iff$ il existe un réel k tel que $\begin{cases} x-c=k\times 0 \\ y-0=k\times 1 \end{cases}$

$\iff$ il existe un réel k tel que $\begin{cases} x-c=0 \\ y=k \end{cases}$

$\iff x - c = 0$

$\iff x = c$

<u>Conclusion</u>

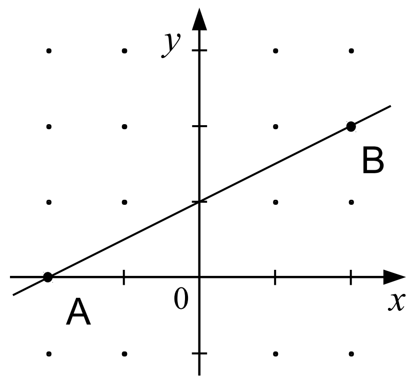
- Toute droite verticale a donc une équation de la forme $x = c$.
  Une telle droite n'a ni coefficient directeur, ni ordonnée à l'origine et ne représente graphiquement aucune fonction.
- L'inconnue y n'apparaît même pas dans l'équation de d !
  En effet, pour déterminer si un point appartient ou non à d, peu importe son ordonnée, seule compte son abscisse.

p275 : 64, 68

III) DÉTERMINER L'ÉQUATION D'UNE DROITE

1) Connaissant deux points :

Ex : Déterminer l'équation de la droite d passant par $A(-2\ ;\ 0)$ et $B(2\ ;\ 2)$.



1ère méthode : $x_A \neq x_B$ donc (AB) n'est pas verticale et a donc une équation de la forme $y = a\,x + b$.

$$\begin{cases} A \in (AB) \\ B \in (AB) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_A = a\,x_A + b \\ y_B = a\,x_B + b \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 = -2\,a + b & L_1 \\ 2 = 2\,a + b & L_2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2 = 4\,a & L_1 \leftarrow L_2 - L_1 \\ 2 = 2\,a + b & L_2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{1}{2} \\ 2 = \dfrac{2}{2} + b \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = \dfrac{1}{2} \\ b = 1 \end{cases}$$

(AB) a donc pour équation : $y = \dfrac{1}{2}x + 1$

2ème méthode : $x_A \neq x_B$ donc (AB) n'est pas verticale et a donc une équation de la forme $y = a\,x + b$.

$$a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{2-0}{2-(-2)} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$B \in (AB)$ donc $y_B = \dfrac{1}{2}x_B + b$ donc $2 = \dfrac{2}{2} + b$ donc $b = 1$

(AB) a donc pour équation : $y = \dfrac{1}{2}x + 1$

3ème méthode : Soit $M(x\,;y)$ un point quelconque :

$$M \in (AB) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x+2 \\ y \end{pmatrix} \text{ est colinéaire à } \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x+2}{4}=\frac{y}{2}$$

$$\Leftrightarrow y=\frac{1}{2}x+1$$

(AB) a donc pour équation : $y=\frac{1}{2}x+1$

2) Connaissant un point et un vecteur directeur :

Ex : Déterminer l'équation de la droite d passant par $A(-2\,;0)$ et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Soit $M(x\,;y)$ un point quelconque :

$$M \in (AB) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x+2 \\ y \end{pmatrix} \text{ est colinéaire à } \vec{u}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x+2}{2}=\frac{y}{1}$$

$$\Leftrightarrow y=\frac{1}{2}x+1$$

(AB) a donc pour équation : $y=\frac{1}{2}x+1$

3) Parallèle à une droite et passant par un point :

Ex : Déterminer l'équation de d' la parallèle à la droite d d'équation : $y=\frac{1}{2}x+1$ passant par $C(1\,;0)$.

d et d' étant parallèles, elles ont le même coefficient directeur, donc l'équation de d' est de la forme : $y=\frac{1}{2}x+b$.

de plus $C \in d'$ donc $y_C=\frac{1}{2}x_C+b$ donc $b=0-\frac{1}{2}\times 1=-\frac{1}{2}$

d' a donc pour équation : $y=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}$

p276 : 76, 80, 82
p278 : 90, p280 : 97
p283 : 104, 106