Nom :	....	
2ndes 14 nov 2017	**Devoir Surveillé de mathématiques n°2**	Durée : 2 h Pas de calculatrice

<u>Exercice I (3,5 points):</u> Calculer les expressions suivantes. On donnera le résultat sous la forme la plus simple possible :

$$A = \left(5\sqrt{2}+2\right)^2 - 3\sqrt{2}\left(4-\sqrt{2}\right) \qquad \text{et} \qquad B = \frac{\left(\sqrt{7}+2\right)^2}{2\sqrt{7}-2}$$

<u>Exercice 2 (2 points):</u>

Soient a, b, c et d des nombres réels. Dans chaque cas ci-dessous, compléter directement la colonne de droite par : $P \Rightarrow Q$; $Q \Rightarrow P$ ou $P \Leftrightarrow Q$

P	Q	$P \Rightarrow Q$; $Q \Rightarrow P$ ou $P \Leftrightarrow Q$
$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$	$AB = CD$	
$\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AI}$	I milieu de $[AB]$	
$x > -1$	$x \geq 0$	
C appartient au cercle de diamètre $[AB]$	ABC est rectangle en C	
Je vis en Espagne	Je vis à Madrid	
$a^2 = b^2$	$a = b$	
$x \in [-1; 3{,}5] \cup [\sqrt{3}; 7]$	$x \leq 7$	
$a + c = b + d$	$a = b$ et $c = d$	

<u>Exercice 3 (5,5 points)</u>: On considère les expressions pour tout nombre x réel :

$A(x) = 3(x-2)^2 - x^2 + 4 + (x-1)(x+2)$
$B(x) = (4-2x)^2 - (x+3)^2 + (3x-1)^2$

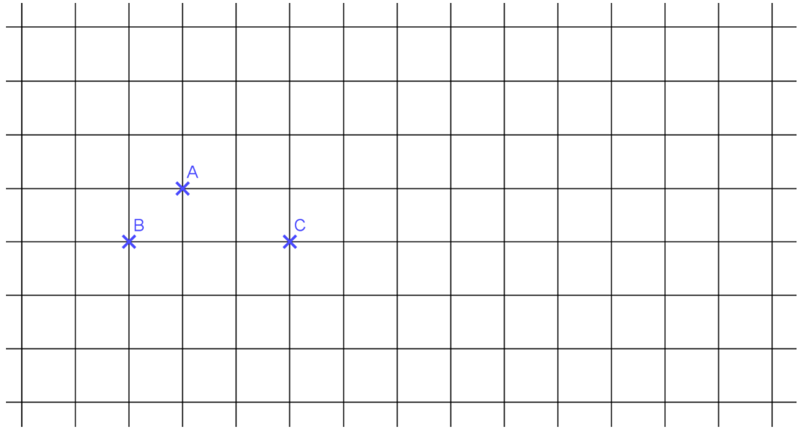
1) Développer, réduire et ordonner les expressions précédentes.
2) Montrer que pour tout x réel, $B(x) = 12\left[\left(x - \frac{7}{6}\right)^2 - \frac{25}{36}\right]$
3) Factoriser $B(x)$.
4) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes : (On choisira la forme de $A(x)$ et $B(x)$ la plus adaptée)

   (E_1): $A(x) = 14$; (E_2): $B(x) = \frac{25}{3}$ et (E_3): $B(x) = 0$

<u>Exercice 4 (4 points):</u>

Soit ABC un triangle non aplati.

1) Construire le point D tel que $\overrightarrow{AD} = 3\,\overrightarrow{BA}$.
2) Soit le point E tel que $3\,\overrightarrow{CE} = 2\,\overrightarrow{BE} + 3\,\overrightarrow{AB}$.
   Montrer que $\overrightarrow{CE} = 2\,\overrightarrow{BC} + 3\,\overrightarrow{AB}$, et construire le point E.
3) Soit le point F tel que $3\,\overrightarrow{FC} = 2\,\overrightarrow{FB}$.
   Exprimer $\overrightarrow{FC}$ en fonction de $\overrightarrow{CB}$ et construire le point F.
4) Que peut-on en conclure pour le quadrilatère AEFD ? Justifier.



<u>Exercice 5 (3 points):</u>

Soit ABCD un quadrilatère quelconque.

1) Démontrer que $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$
2) On appelle I le milieu de [AC], J celui de [BD].
   Démontrer que $\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{ID} = 2\,\overrightarrow{IJ}$
3) En déduire que $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = 2\,\overrightarrow{IJ}$

<u>Exercice 6 (2 points):</u>

5 adultes et 6 enfants déjeunent au restaurant et commandent chacun un menu. Les adultes commandent également une bouteille de vin à 7 euros. La note s'élève à 143,50 euros. Sachant que le prix d'un menu enfant est le tiers du prix d'un menu adulte, déterminer le prix d'un menu enfant.

NOM :

I) Compléter la colonne de droite

(P)	(Q)	(P)⇒(Q) ou (Q)⇒(P) ou (P)⇔(Q)
$(x-4)^2(x+2)=0$	$x=4$	
$y \in \mathbb{R}^+ \cap \mathbb{Z}$	$y \in \mathbb{N}$	
$x \in]-\infty;-1]$	$x \in]-\infty;-\sqrt{2}]$	
(AB)//(CD)	$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$	
C∈[KL]	$\overrightarrow{KC}+\overrightarrow{CL}=\overrightarrow{KL}$	
$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AI}$	I milieu de [BC]	
$x \geq 3$ ou $x<5$	$x \in [3;5]$	
BC=CD	$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{CD}$	

II) 1) Compléter le tableau suivant en traduisant chaque situation géométrique par une égalité vectorielle :

Situation géométrique	Égalité vectorielle
PQRS est un parallélogramme	
D' est l'image de D par la translation de vecteur $\overrightarrow{ZU}$	
T est le symétrique de C par rapport à N	

2) Compléter le tableau suivant en traduisant chaque égalité vectorielle par une situation géométrique :

Situation géométrique	Égalité vectorielle
	$\overrightarrow{EK}+\overrightarrow{ES}=\vec{0}$
	$\overrightarrow{GH}+\overrightarrow{GI}=\overrightarrow{GO}$
	$\overrightarrow{DM}=k\,\overrightarrow{EC}$, $k \in \mathbb{R}^*$, $E \neq C$

III)On donne l'algorithme suivant :

```
Saisir p
c prend la valeur de p – 1
p prend la valeur de p + 1
p prend la valeur de  p×p – c×c
Afficher p
```

1) Tester cet algorithme en choisissant comme valeur initiale : p = 2.
2) Écrire le résultat de cet algorithme sous la forme d'une expression la plus simple possible.

IV)Résoudre dans $\mathbb{R}$:

$(E_1): 49x^2-9=-2(6-14x)(x+1)$ $\qquad (E_2): \dfrac{3}{x-1}-\dfrac{7-x^2}{(x-1)(x+2)}=\dfrac{1}{x+2}$ $\qquad (E_3): (2x^2+3x-4)^2=(2x^2+x+5)^2$

V) 1) Soient a et b deux réels quelconques. Montrer que : $a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$.
2) En déduire la résolution dans $\mathbb{R}$ de l'équation (E) : $x^3+8=-4x^2+16$

VI)Soient A, B, C et D quatre points quelconques du plan.
On définit les points M et N par : $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BC}$ et $\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}$
1) Montrer que $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{BA}$.
2) A quelle condition sur le quadrilatère ABDC les points M et N sont-ils confondus ?

VII)Résoudre les problèmes suivants :
1) Déterminer le(s) réel(s) x tel(s) que le produit de la somme du double de x et de 3 par la différence de la moitié de x et de 5 soit égal au carré de x.
2) Existe-t-il un nombre x tel que le quotient de la différence de x et de 5 par 2 soit égal à l'inverse de la somme de x et de 5 ? Si oui, donner la (ou les) valeur(s) de ce nombre.
3) Trouver les nombres réels dont le double est égal au cube.

BARÈME PROBABLE : I) 4pts II) 3pts III) 2pts IV) 4pts V) 2pts VI) 2pts VII) 3pts

I) Soient A, B, C et D quatre points du plan distincts deux à deux.
Compléter ci-dessous la colonne « réponse » avec l'un des choix suivants : P ⇒ Q ; Q ⇒ P ; P ⇔ Q

P	**Q**	**Réponse**
$\overrightarrow{AB}=-2\overrightarrow{AC}$	A, B et C sont alignés	
$AB = 2AC$	$\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{AC}$	
C est l'image de D par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$	$ABCD$ est un parallélogramme	
Il existe un réel k non nul tel que $\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{CD}$	(AB) // (CD)	
I est le milieu de $[AB]$	$\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{IB}$	
$ABCD$ est un carré	$ABCD$ est un losange	
$AI = IB$	I est le milieu de $[AB]$	
$x>0$	$x\geqslant 0$	

II) Soit $ABCD$ un parallélogramme et soit I le milieu de $[CD]$.

1) Construire les points M et N tels que : $\overrightarrow{AM}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AN}=3\overrightarrow{AD}$.
2) Exprimer $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{BI}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$.
3) Que peut-on dire des droites (MN) et (BI) ?
4) Exprimer $\overrightarrow{CM}$ et $\overrightarrow{CN}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$.
5) Que peut-on en déduire pour les points C, M et N ?

III) Soit ABC un triangle et I le milieu de $[AC]$

1) Construire les points R et S tels que : $\overrightarrow{BR}=-\frac{1}{4}\overrightarrow{CB}$ et $\overrightarrow{AS}=\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$.
2) Montrer que R est le milieu de $[SI]$.

IV) On considère la fonction f définie sur ℝ par $f(x)=x^2-6x-3$

1) Montrer que pour tout réel x, $f(x)=(x-3)^2-12$
2) En déduire, pour tout réel x, une forme factorisée de $f(x)$.
3) Utiliser la forme adéquate de l'expression $f(x)$ pour résoudre algébriquement dans ℝ les équations suivantes : $(E_1): f(x)=-12$ $(E_2): f(x)=0$ $(E_3): f(x)=-15$

V) Résoudre dans ℝ les équations suivantes :

$(E_4): (1+x)^2=1-x^2$

$(E_5): \frac{3}{x+2}=\frac{2}{x+3}$

$(E_6): \frac{x^2-2}{(x-1)(x-2)}-\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x-2}=0$

$(E_7): \frac{x^2+4x+4}{x-2}=x+6+\frac{16}{x-2}$

$(E_8): (1-2x)^2+4x^2-1=6x-3$

BAREME PROBABLE : I) 2pts II) 5pts III) 3pts IV) 4pts V) 6pts