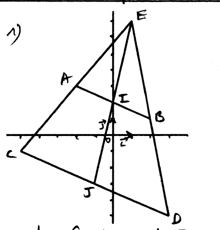
2des Composition du 19 V 2010 3h Corrigé succinct

I)

1)



2) **Nature de ABCD**

Par (H) $\overrightarrow{CD} = 2\overrightarrow{AB}$ donc $\overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires donc (CD) et (AB) sont parallèles donc $\boxed{\text{ABCD est un trapèze de bases [AB] et [CD]}}$

3) **Coordonnées de D**

Par (H) $\overrightarrow{CD} = 2\overrightarrow{AB}$ donc $\begin{cases} x_D - x_C = 2(x_B - x_A) \\ y_D - y_C = 2(y_B - y_A) \end{cases}$ donc $\begin{cases} x_D + 5 = 2(2+2) \\ y_D + 1 = 2(1-3) \end{cases}$ donc $\begin{cases} x_D = 3 \\ y_D = -5 \end{cases}$ $\boxed{D(3;-5)}$

Coordonnées de I et J

Par (H) I est le milieu de [AB] donc $\begin{cases} x_I = \frac{x_A + x_B}{2} = 0 \\ y_I = \frac{y_A + y_B}{2} = 2 \end{cases}$ et J est le milieu de [CD] donc $\begin{cases} x_J = \frac{x_C + x_D}{2} = -1 \\ y_J = \frac{y_C + y_D}{2} = -3 \end{cases}$ $\boxed{I(0;2) \quad J(-1;-3)}$

4) **Coordonnées de E** Posons $E(x;y)$

Par (H) $E \in (AC)$ donc $\overrightarrow{AE}(x+2 ; y-3)$ est colinéaire à $\overrightarrow{CA}(3;4)$ donc $4(x+2) - 3(y-3) = 0$ donc $4x - 3y + 17 = 0$

$E \in (BD)$ donc $\overrightarrow{BE}(x-2 ; y-1)$ est colinéaire à $\overrightarrow{DB}(-1;6)$ donc $6(x-2) + y - 1 = 0$ donc $6x + y - 13 = 0$

Résolvons le système :

$(S) : \begin{cases} 4x - 3y + 17 = 0 & L_1 \\ 6x + y - 13 = 0 & L_2 \end{cases}$ $(S) \Leftrightarrow \begin{cases} 22x - 22 = 0 & L_1 \leftarrow L_1 + 3L_2 \\ y = -6x + 13 \end{cases}$ $(S) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 7 \end{cases}$ $\boxed{E(1;7)}$

5) **Montrer que E appartient à (IJ)**

On remarque que $\overrightarrow{IE}(1;5)$ et $\overrightarrow{JI}(1;5)$ donc $\overrightarrow{IE} = \overrightarrow{JI}$ donc $\boxed{\text{I, E et J sont alignés}}$

II) Le vendeur doit-il abandonner son nouveau café ?

La fréquence théorique correspondant au choix café est $p = 0,38$

la fréquence correspondant au choix café dans l'échantillon est $f = 0,31$ et la taille de l'échantillon est $n = 400$

or $n > 25$ et $0,2 < p < 0,8$ donc on peut déterminer l'intervalle I de fluctuation au seuil de 95 % :

$p - \frac{1}{\sqrt{n}} = 0,38 - \frac{1}{\sqrt{400}} = 0,33$ et $p + \frac{1}{\sqrt{n}} = 0,38 + \frac{1}{\sqrt{400}} = 0,43$ donc $I = [0,33 ; 0,43]$

On constate que f n'appartient pas à I donc le $\boxed{\text{vendeur doit probablement remettre en cause son nouveau café}}$

III)

1) **Effectifs cumulés croissants**

nbre de balles / min	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
effectif	2	5	8	5	12	6	10	8	3	1
ECC	2	7	15	20	32	38	48	56	59	60

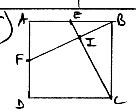
2) **Moyenne** : $\bar{x} = \frac{2\times10 + 5\times11 + 8\times12 + \dots + 1\times19}{60} \approx$ $\boxed{\text{14,4 balles par minute}}$

Médiane : $\frac{60+1}{2} = 30,5$ donc la médiane est la moyenne du 30e et du 31e termes. Méd $= \frac{14+14}{2} =$ $\boxed{\text{14 balles par minute}}$

1er quartile : $\frac{60}{4} = 15$ donc Q_1 est le 15ème terme. $\boxed{Q_1 = \text{12 balles par minute}}$

3e quartile : $\frac{3\times60}{4} = 45$ donc Q_3 est le 45ème terme. $\boxed{Q_3 = \text{16 balles par minute}}$

IV)



1) **Coordonnées des points** : le repère est $(D ; \overrightarrow{DC} ; \overrightarrow{DA})$ donc on a : $\boxed{D(0;0) ; C(1;0) \text{ et } A(0;1)}$

Par (H) ABCD est un carré donc $\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DA}$ donc $\boxed{B(1;1)}$

Par (H) E est le milieu de [AB] donc $\begin{cases} x_E = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{1}{2} \\ y_E = \frac{y_A + y_B}{2} = 1 \end{cases}$ et F celui de [AD] donc $\begin{cases} x_F = \frac{x_A + x_D}{2} = 0 \\ y_F = \frac{y_A + y_D}{2} = \frac{1}{2} \end{cases}$ $\boxed{E(\tfrac{1}{2};1) \quad F(0;\tfrac{1}{2})}$

2) **Coordonnées de $\overrightarrow{BF}$** $\begin{cases} x_F - x_B = 0 - 1 = -1 \\ y_F - y_B = \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2} \end{cases}$ donc $\boxed{\overrightarrow{BF}(-1 ; -\tfrac{1}{2})}$

3) **Coordonnées de $\overrightarrow{BI}$** Par (H) $\overrightarrow{BI} = k\overrightarrow{BF}$ $(k \in \mathbb{R})$ donc $\begin{cases} x_{\overrightarrow{BI}} = k\, x_{\overrightarrow{BF}} = -k \\ y_{\overrightarrow{BI}} = k\, y_{\overrightarrow{BF}} = -\frac{k}{2} \end{cases}$ $\boxed{\overrightarrow{BI}(-k ; -\tfrac{k}{2})}$

4) **Coordonnées de I** $\begin{cases} x_{\overrightarrow{BI}} = x_I - x_B \\ y_{\overrightarrow{BI}} = y_I - y_B \end{cases}$ donc $\begin{cases} -k = x_I - 1 \\ -\frac{k}{2} = y_I - 1 \end{cases}$ donc $\begin{cases} x_I = 1 - k \\ y_I = 1 - \frac{k}{2} \end{cases}$ $\boxed{I(1-k ; 1-\tfrac{k}{2})}$

5) **Calculer k** : Par (H), E, I et C sont alignés donc $\overrightarrow{CI}(-k ; 1-\frac{k}{2})$ est colinéaire à $\overrightarrow{CE}(-\frac{1}{2};1)$

donc $-k + \frac{1}{2}(1 - \frac{k}{2}) = 0$ donc $\frac{k}{4} + k = \frac{1}{2}$ donc $\frac{5}{4}k = \frac{1}{2}$ donc $\boxed{k = \frac{2}{5}}$

V)

1) $g(x) = 2(x-1)^2$ Pour tout x de $\mathbb{R}$, $g(x) = 2x^2 - 4x + 2 = 2(x^2 - 2x + 1) = \boxed{2(x-1)^2}$

2) $h(x) = 3 - \frac{6}{x+1}$ Pour tout x de $\mathbb{R} - \{-1\}$, $h(x) = \frac{3x-3}{x+1} = \frac{3x+3-6}{x+1} = \frac{3(x+1)}{x+1} - \frac{6}{x+1} = \boxed{3 - \frac{6}{x+1}}$

3) **Variations de g sur $]-\infty ; 1]$**

Pour tous x_1, x_2 tels que $x_1 < x_2 \leq 1$

$g(x_1) - g(x_2) = 2x_1^2 - 4x_1 + 2 - 2x_2^2 + 4x_2 - 2$
$= 2x_1^2 - 2x_2^2 - 4x_1 + 4x_2$
$= 2(x_1 - x_2)(x_1 + x_2) - 4(x_1 - x_2)$
$= \boxed{2(x_1 - x_2)(x_1 + x_2 - 2)}$

Par (H) $x_1 < x_2$ donc $x_1 - x_2 < 0$
$x_1 < 1$ et $x_2 \leq 1$ donc $x_1 + x_2 < 2$ donc $x_1 + x_2 - 2 < 0$

Bilan, $g(x_1) - g(x_2) > 0$ donc $g(x_1) > g(x_2)$
donc $\boxed{g \text{ est strictement décroissante sur }]-\infty ; 1]}$

Variations de g sur $[1 ; +\infty[$

Pour tous x_1, x_2 tels que $1 \leq x_1 < x_2$

$g(x_1) - g(x_2) = 2(x_1 - x_2)(x_1 + x_2 - 2)$

Par (H) $x_1 < x_2$ donc $x_1 - x_2 < 0$
$x_1 \geq 1$ et $x_2 > 1$ donc $x_1 + x_2 > 2$ donc $x_1 + x_2 - 2 > 0$

Bilan $g(x_1) - g(x_2) < 0$ donc $g(x_1) < g(x_2)$
donc $\boxed{g \text{ est strictement croissante sur } [1 ; +\infty[}$

Tableau de variations

x	$-\infty$		1		$+\infty$
g		↘	0	↗	

4) **Variations de h sur $]-\infty ; -1[$**

Pour tous x_1, x_2 tels que $x_1 < x_2 < -1$

$h(x_1) - h(x_2) = 3 - \frac{6}{x_1+1} - 3 + \frac{6}{x_2+1}$
$= \frac{-6(x_2+1) + 6(x_1+1)}{(x_1+1)(x_2+1)}$
$= \boxed{\frac{6(x_1 - x_2)}{(x_1+1)(x_2+1)}}$

Par (H) $\begin{cases} x_1 < x_2 \text{ donc } x_1 - x_2 < 0 \\ x_1 < -1 \text{ donc } x_1 + 1 < 0 \\ x_2 < -1 \text{ donc } x_2 + 1 < 0 \end{cases}$ donc $h(x_1) - h(x_2) < 0$ donc $h(x_1) < h(x_2)$

Bilan : $\boxed{h \text{ est strictement croissante sur }]-\infty ; -1[}$

Variations de h sur $]-1 ; +\infty[$

Pour tous x_1, x_2 tels que $-1 < x_1 < x_2$

$h(x_1) - h(x_2) = \frac{6(x_1 - x_2)}{(x_1+1)(x_2+1)}$

Par (H) $\begin{cases} x_1 < x_2 \text{ donc } x_1 - x_2 < 0 \\ x_1 > -1 \text{ donc } x_1 + 1 > 0 \\ x_2 > -1 \text{ donc } x_2 + 1 > 0 \end{cases}$ donc $h(x_1) - h(x_2) < 0$ donc $h(x_1) < h(x_2)$

Bilan : $\boxed{h \text{ est strictement croissante sur }]-1 ; +\infty[}$

Tableau de variations

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
h		↗	‖	↗	

5) **Tableau de variations de f** :

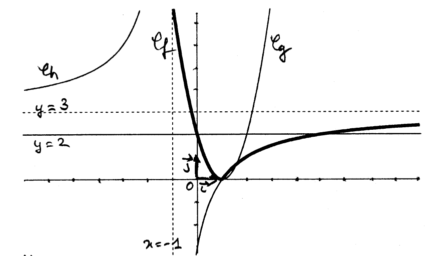
f a les variations de g sur $]-\infty ; 1]$ et celles de h sur $[1 ; +\infty[$ donc d'après 3) et 4) on a pour f :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
f		↘	0	↗	

6) **Minimum de f**

D'après 5) f est strictement décroissante sur $]-\infty ; 1]$ puis strictement croissante sur $[1 ; +\infty[$ avec $f(1) = 0$

donc $\boxed{f \text{ admet un minimum de 0 en 1 sur } \mathbb{R}}$



8) **Résoudre (I) : $f(x) \leq 2$**

- graphiquement : les solutions sont les abscisses des points de $\mathcal{C}_f$ situés en dessous de la droite d'éq $y = 2$. $\boxed{\mathcal{S} = [0 ; 5]}$
- algébriquement :

1er cas :

$\begin{cases} f(x) \leq 2 \\ x \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2 - 4x + 2 \leq 2 \\ x \leq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x(x-2) \leq 0 \\ x \leq 1 \end{cases}$

x	$-\infty$		0		1
$2x$		−	0	+	
$x-2$		−		−	
Π		+	0	−	

donc $\mathcal{S}_1 = [0 ; 1]$

2ème cas :

$\begin{cases} f(x) \leq 2 \\ x \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3 - \frac{6}{x+1} \leq 2 \\ x \geq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x-5}{x+1} \leq 0 \\ x \geq 1 \end{cases}$

x	1		5		$+\infty$
$x-5$		−	0	+	
$x+1$		+		+	
Q		−	0	+	

donc $\mathcal{S}_2 = [1 ; 5]$

Bilan : $\boxed{\mathcal{S} = \mathcal{S}_1 \cup \mathcal{S}_2 = [0 ; 5]}$