2de Composition du 27 III 18 3h Corrigé succinct

I) Résoudre dans $\mathbb{R}$:

1) $(E) : 4x^2-9-2(2x-3)+x(2x-3)=0$ (pas de conditions)

$(E) \Leftrightarrow (2x-3)(2x+3)-2(2x-3)+x(2x-3)=0$

$(E) \Leftrightarrow (2x-3)(2x+3-2+x)=0$

$(E) \Leftrightarrow (2x-3)(3x+1)=0$

$(E) \Leftrightarrow x=\frac{3}{2}$ ou $x=-\frac{1}{3}$ $\boxed{S=\left\{-\frac{1}{3} ; \frac{3}{2}\right\}}$

2) $(E') : \frac{x-2}{x+2} - \frac{x+2}{x-2} = \frac{4x^2+8x+16}{x^2-4}$

conditions : $\begin{cases} x+2 \neq 0 \\ x-2 \neq 0 \\ x^2-4 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \neq 2$ et $x \neq -2$

$(E') \Leftrightarrow \frac{(x-2)^2-(x+2)^2}{(x-2)(x+2)} = \frac{4x^2+8x+16}{(x-2)(x+2)}$ et $x \neq -2$ et $x \neq 2$

$(E') \Leftrightarrow (x-2)^2-(x+2)^2 = 4x^2+8x+16$ et $x \neq -2$ et $x \neq 2$

$(E) \Leftrightarrow \cancel{x^2}-4x+\cancel{4}-\cancel{x^2}-4x-\cancel{4}-4x^2-8x-16=0$ et $x \neq -2$ et $x \neq 2$

$(E') \Leftrightarrow -4x^2-16x-16=0$ et $x \neq -2$ et $x \neq 2$

$(E') \Leftrightarrow x^2+4x+4=0$ et $x \neq -2$ et $x \neq 2$

$(E') \Leftrightarrow (x+2)^2=0$ et $x \neq -2$ et $x \neq 2$

$(E') \Leftrightarrow x=-2$ et $x \neq -2$ et $x \neq 2$

$\boxed{S=\emptyset}$

II) Partie A

1) Vérification d'égalité

Pour tout x de $\mathbb{R}$, $\boxed{8-f(x)} = 8+2x^2-8x = 2(x^2-4x+4) = \boxed{2(x-2)^2}$

2) Extremum de f

On remarque que $f(2)=8$

donc d'après 1), pour tout x de $\mathbb{R}$, $f(2)-f(x)=2(x-2)^2$

or un carré est toujours positif ou nul donc $f(2)-f(x) \geq 0$

donc $f(2) \geq f(x)$

donc $\boxed{f \text{ admet un maximum de } 8 \text{ en } x=2 \text{ sur } \mathbb{R}}$

3) Variations sur $]-\infty ; 2]$

Pour tous x_1, x_2 tels que $x_1<x_2 \leq 2$,

déterminons le signe de $f(x_1)-f(x_2)$:

$f(x_1)-f(x_2) = -2x_1^2+8x_1+2x_2^2-8x_2$

$= -2\left[(x_1^2-x_2^2)-4(x_1-x_2)\right]$

$= -2\left[(x_1-x_2)(x_1+x_2)-4(x_1-x_2)\right]$

$= -2(x_1-x_2)(x_1+x_2-4)$

or par (H) $x_1<x_2$ donc $x_1-x_2<0$ donc $-2(x_1-x_2)>0$

$x_1<2$ et $x_2 \leq 2$ donc $x_1+x_2<4$ donc $x_1+x_2-4<0$

Bilan, $f(x_1)-f(x_2)<0$ donc $f(x_1)<f(x_2)$

donc $\boxed{f \text{ est strictement croissante sur }]-\infty ; 2]}$

Variations sur $[2 ; +\infty[$

Pour tous x_1, x_2 tels que $2 \leq x_1 < x_2$

on a : $f(x_1)-f(x_2) = -2(x_1-x_2)(x_1+x_2-4)$

or par (H), $x_1<x_2$ donc $x_1-x_2<0$ donc $-2(x_1-x_2)>0$

$x_1 \geq 2$ et $x_2>2$ donc $x_1+x_2>4$ et $x_1+x_2-4>0$

Bilan, $f(x_1)-f(x_2)>0$ donc $f(x_1)>f(x_2)$

donc $\boxed{f \text{ est strictement décroissante sur } [2 ; +\infty[}$

4) Courbe $\mathcal{C}_f$

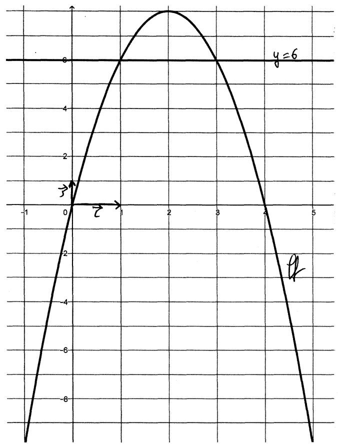


Tableau de variations

x	$-\infty$		2		$+\infty$
f		$\nearrow$	8	$\searrow$	

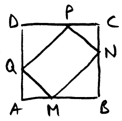
5) Résoudre graphiquement $f(x)>6$

les solutions sont les abscisses des points de $\mathcal{C}_f$ situés au dessus de la droite d'équation $y=6$

$\boxed{S=]1 ; 3[}$

Partie B

1) Figure



2) A quel intervalle appartient x ?

par (H) $M \in [AB]$ donc $AA \leq AM \leq AB$ donc $0 \leq x \leq 4$

De même pour N, P et Q donc $\boxed{x \in [0 ; 4]}$

3) Aire de AMQ

AMQ est un triangle rectangle isocèle en A

donc pour tout x de $[0;4]$, $\text{Aire}(AMQ) = \frac{AM \times AQ}{2} = \frac{x^2}{2}$

Aire de BMN

BMN est un triangle rectangle isocèle en B

donc pour tout x de $[0;4]$, $\text{Aire}(BMN) = \frac{BM \times BN}{2} = \frac{(4-x)^2}{2}$

4) Aire de MNPQ

D'après la construction de la figure, les triangles AMQ et CPN ont les mêmes dimensions et donc la même aire.

Il en est aussi de même avec BMN et DQP.

Donc pour tout x de $[0;4]$, on a :

$\text{Aire}(MNPQ) = \text{Aire}(ABCD) - \text{Aire}(AMQ) - \text{Aire}(BMN) - \text{Aire}(CPN) - \text{Aire}(DQP)$

$= 4 \times 4 - \frac{x^2}{2} - \frac{(4-x)^2}{2} - \frac{x^2}{2} - \frac{(4-x)^2}{2}$

$= 16 - x^2 - (4-x)^2$

$= 16 - x^2 - 16 + 8x - x^2$

$= -2x^2 + 8x = f(x)$

5) Maximum de Aire(MNPQ)

D'après B4), l'aire de MNPQ a le même maximum que f

D'après A2), f admet un maximum de 8 en $x=2$ sur $\mathbb{R}$ et donc aussi sur $[0;4]$

donc le quadrilatère MNPQ atteind son aire maximum $\boxed{\text{en } x=2}$ et cette aire est 8 cm^2

6) Aire(MNPQ) > 6 ?

D'après A5) $f(x)>6 \Leftrightarrow x \in]1;3[$

donc $\boxed{\text{MNPQ a une aire supérieure à 6 lorsque } 1<x<3}$

Partie C

1) $(A, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ est un repère orthonormé ?

Par (H) ABCD est un carré de côté 4 cm et $\vec{\imath} = \frac{1}{4}\vec{AB}$ et $\vec{\jmath} = \frac{1}{4}\vec{AD}$

donc $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$ sont non colinéaires et $(A, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ est un repère

de plus $(AB) \perp (AD)$ donc ce repère est orthogonal

de plus $AB = AD$ donc $\boxed{\text{ce repère est orthonormé}}$

2) Coordonnées des points de la figure

A est l'origine du repère donc $\boxed{A(0;0)}$

$\vec{AB} = 4\vec{\imath}$ donc $\boxed{B(4;0)}$

$\vec{AD} = 4\vec{\jmath}$ donc $\boxed{D(0;4)}$

ABCD est un carré donc $\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{AD} = 4\vec{\imath} + 4\vec{\jmath}$ donc $\boxed{C(4;4)}$

pour tout x de $[0;4]$ $AM = x$ donc $\vec{AM} = x\vec{\imath}$ donc $\boxed{M(x;0)}$

$\vec{AN} = \vec{AB} + \vec{BN} = 4\vec{\imath} + (4-x)\vec{\jmath}$ donc $\boxed{N(4; 4-x)}$

$\vec{AP} = \vec{AD} + \vec{DP} = 4\vec{\jmath} + (4-x)\vec{\imath}$ donc $\boxed{P(4-x; 4)}$

$\vec{AQ} = x\vec{\jmath}$ donc $\boxed{Q(0;x)}$

3) Montrer que MNPQ est un rectangle

D'après 2) pour tout x de $[0;4]$ $\vec{MN}\begin{pmatrix}4-x\\4-x\end{pmatrix}$ et $\vec{QP}\begin{pmatrix}4-x\\4-x\end{pmatrix}$

donc $\vec{MN} = \vec{QP}$ donc MNPQ est un parallélogramme

le repère étant orthonormé calculons les longueurs des diagonales :

$QN = \sqrt{(x_N - x_Q)^2 + (y_N - y_Q)^2} = \sqrt{4^2 + (4-2x)^2}$

$MP = \sqrt{(x_P - x_M)^2 + (y_P - y_M)^2} = \sqrt{(4-2x)^2 + 4^2}$

donc $QN = MP$ donc le parallélogramme MNPQ a ses diagonales de même longueur et est un rectangle

4) ABCD et MNPQ ont le même centre ?

Les deux quadrilatères sont notamment des parallélogrammes.

Leurs centres sont donc les milieux de l'une de leurs diagonales

Appelons I le centre de ABCD qui est le milieu de $[AC]$

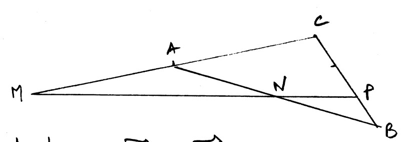
$x_I = \frac{x_A + x_C}{2} = \frac{4}{2} = 2$ et $y_I = \frac{y_A + y_C}{2} = \frac{4}{2} = 2$

Appelons J le centre de MNPQ qui est le milieu de $[MP]$

$x_J = \frac{x_M + x_P}{2} = \frac{x + 4 - x}{2} = 2$ et $y_J = \frac{y_M + y_P}{2} = \frac{4}{2} = 2$

I et J sont confondus donc $\boxed{\text{ABCD et MNPQ ont bien le même centre}}$

III) 1) Figure



2) $\vec{MN}$ en fonction de $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$

Par (H) $\vec{AM} = -\vec{AC}$ donc $\vec{MA} = \vec{AC}$

$\vec{AN} = \frac{1}{2}\vec{AB}$

donc $\boxed{\vec{MN} = \vec{MA} + \vec{AN} = \frac{1}{2}\vec{AB} + \vec{AC}}$

3) $\vec{MP}$ en fonction de $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$

D'après 2) $\vec{MA} = \vec{AC}$ et par (H) $\vec{BP} = \frac{1}{3}\vec{BC}$

donc $\vec{MP} = \vec{MA} + \vec{AB} + \vec{BP}$

$= \vec{AC} + \vec{AB} + \frac{1}{3}\vec{BC}$

$= \vec{AC} + \vec{AB} + \frac{1}{3}(\vec{BA} + \vec{AC})$

$= \boxed{\frac{2}{3}\vec{AB} + \frac{4}{3}\vec{AC}}$

4) Alignement de M, N et P

D'après 2) $\vec{MN} = \frac{1}{2}\vec{AB} + \vec{AC}$

D'après 3) $\boxed{\vec{MP} = \frac{2}{3}\vec{AB} + \frac{4}{3}\vec{AC} = \frac{4}{3}\left(\frac{1}{2}\vec{AB} + \vec{AC}\right) = \frac{4}{3}\vec{MN}}$

donc $\vec{MP}$ est colinéaire à $\vec{MN}$

donc $\boxed{\text{M, N et P sont alignés}}$

IV) Partie A

1) Univers équiprobable

Représentons l'expérience par un tableau :

dé 2 \ dé 1	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	4	6	8	10	12
3	3	6	9	12	15	18
4	4	8	12	16	20	24
5	5	10	15	20	25	30
6	6	12	18	24	30	36

Il y a 36 cases dans le tableau donc 36 issues :

$\boxed{\Omega = \{(1;1) ; (1;2) ; \cdots (2;1) ; (2;2) ; \cdots (6;6)\}}$

2) Appelons A l'événement "Joe gagne avec sa règle du jeu"

Dans le tableau, on a entouré en pointillés les issues correspondantes

Les issues sont équiprobables.

$\boxed{p(A) = \frac{\text{nbre d'issues de A}}{\text{nbre total d'issues}} = \frac{26}{36} = \frac{13}{18} \approx 0{,}722}$

3) Appelons B l'événement "Billy gagne avec sa règle du jeu"

Dans le tableau, on a entouré par des cercles les issues correspondantes à $\overline{B}$

$p(\overline{B}) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$ donc $\boxed{p(B) = 1 - p(\overline{B}) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} = 0{,}75}$

Partie B

1) Variable à initialiser

Au tout début de l'algorithme il faut initialiser J : $\boxed{J = 0}$

2) Que fait l'algorithme ?

J contient le nombre de parties gagnées par Joe avec la 1ère règle.

L'algorithme simule 1000 parties, et pour chaque partie, mémorise les deux lancers de dés dans les variables D et E et augmente J si Joe a gagné la partie en cours.

Puis, à la fin, l'algorithme affiche $\frac{J}{1000}$, c'est à dire la proportion des parties gagnées par Joe.

3) Les résultats sont-ils surprenants ?

D'après la question A2), la probabilité que Joe gagne avec la 1ère règle est $p(A) \approx 0{,}722$.

Or justement, on constate que les valeurs proposées fluctuent autour de $p(A)$ et ce n'est bien sûr pas du tout surprenant !

4) Algorithme modifié :

```
J = 0
Pour I de 1 à 1000
    D = entier aléatoire de 1 à 6
    E = entier aléatoire de 1 à 6
    Si D×E < 18
        J = J + 1
    Sinon
        J = J - 2
    Fin Si
Fin Pour
Afficher J
```