

NOM :	Composition n°1 de mathématiques Calculatrice autorisée	Lundi 11 décembre 2017
2D		Durée : 2h00

Exercice 1 :

ABCD est un rectangle tel que : $AB = \sqrt{18} - \sqrt{8}$ et $BC = \sqrt{50} - \sqrt{32}$

Ce rectangle est-il un carré ? Justifier en détaillant les étapes de calcul.

Exercice 2 :

On considère les deux algorithmes suivants :

Algorithme A

Variables : X, Y, Z, T
Saisir X
 Y prend la valeur $X + 4$
 Z prend la valeur $Y \times Y$
 T prend la valeur $Z - 3$
Afficher T

Algorithme B

Variables : X, Y
Saisir X
Affecter à Y la valeur $X \times X$
Affecter à X la valeur $X \times 8$
Affecter à X la valeur $X + 13$
Affecter à X la valeur $X + Y$
Afficher X

1/ Indiquer ce qu'affiche chacun des deux algorithmes lorsqu'on saisit $X = -2$? Qu'observez-vous ?

2/ Cette observation est-elle vérifiée quelle que soit la valeur de X saisie ? Justifier.

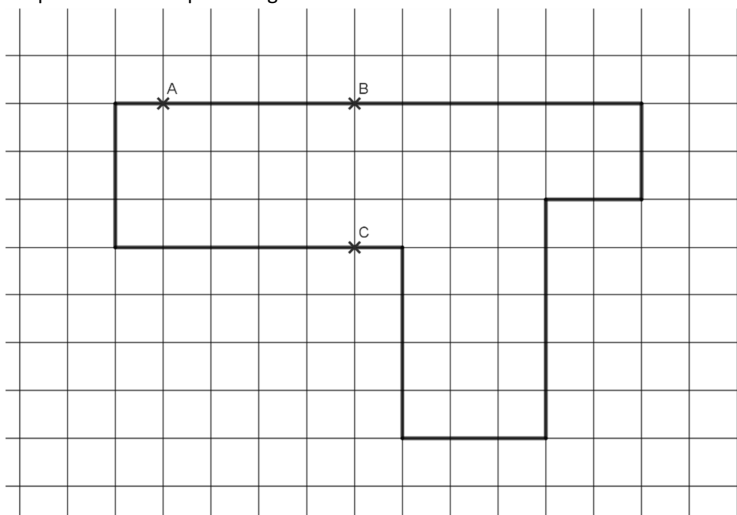
Exercice 3 :

Agnès (A), Boris (B) et Carine (C) sont assis à une table selon le schéma ci-dessous. Il y a trois consignes :

- 1) Boris est assis entre Agnès et Isabelle (I)
- 2) Carine est assise entre Jules (J) et Agnès
- 3) La position de Kim (K) vérifie : $\vec{BK} = \vec{BC} + \vec{BI}$

Règle : Lorsqu'une personne (P) est assise entre deux personnes (L) et (N), alors P est le milieu de [LN]

- a) Placer Isabelle, Jules et Kim sur le plan de table schématisé ci-dessous
- b) Traduire les consignes 1 et 2 par une égalité vectorielle
- c) Montrer que ACKB est un parallélogramme.



Exercice 4 :

ABC est un triangle quelconque. I, J et K sont les milieux respectivement de [AB], [BC] et [AC].

- 1) Montrer que AIJK est un parallélogramme
- 2) Montrer que : $\vec{AJ} + \vec{BK} + \vec{CI} = \vec{0}$

Exercice 5 :

Soit h la fonction définie par : $h(x) = \frac{x-1}{2x+1}$

- 1) Déterminer l'ensemble de définition de h
- 2) Les points suivants appartiennent-ils à C_h la courbe représentative de h ?

$$A(-2; 1); B\left(-\frac{1}{2}; -2\right); C(\sqrt{2}; 0,1)$$

- 3) Déterminer algébriquement les antécédents éventuels de $\sqrt{3}$ et de $\frac{1}{2}$.

Exercice 6 :

La fonction f est définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = x^3 + x^2 - 4x - 4$.

- 1) Montrer que pour tout x de \mathbb{R} , $f(x) = (x^2 - 4)(x + 1)$.

Dans la suite de cet exercice, on travaillera sur $D_f = [-3; 3]$.

- 2) Etablir le tableau de valeurs de f sur l'intervalle $[-3; 3]$ avec un pas de 0,5.
- 3) Tracer la courbe représentative de f , notée C_f , sur $[-3; 3]$ dans un repère orthogonal $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

On choisira 2 cm pour unité en abscisse et 0,5 cm pour unité en ordonnée.

- 4) Déterminer graphiquement les antécédents éventuels de 0 par f sur $[-3; 3]$.

- 5) Résoudre sur $[-3; 3]$ l'équation : $(E_1): f(x) = 0$.

Cela confirme-t-il les valeurs trouvées à la question 4 ?

- 6) Déterminer graphiquement les solutions de $(I_1): f(x) > 0$ sur $[-3; 3]$.

- 7) On donne la fonction g définie sur $[-3; 3]$ par $g(x) = 2x - 4$.

Tracer la courbe représentative de g , notée C_g .

- 8) Résoudre graphiquement et algébriquement $(E_2): f(x) = g(x)$ sur $[-3; 3]$.

- 9) Résoudre graphiquement : $(I_2): f(x) > g(x)$ sur $[-3; 3]$.

Barème probable :

Ex1 : 2,5 points Ex2 : 2,5 points Ex3 : 2,5 points Ex4 : 2,5 points Ex5 : 3 points Ex6 : 7 points

I) 1) Montrer que pour tout réel x , on a : $-4x^2 + 2x + 12 = (2x + 3)(4 - 2x)$.

2) Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{1}{-4x^2 + 2x + 12}$

a) Déterminer l'ensemble de définition Df de la fonction f .

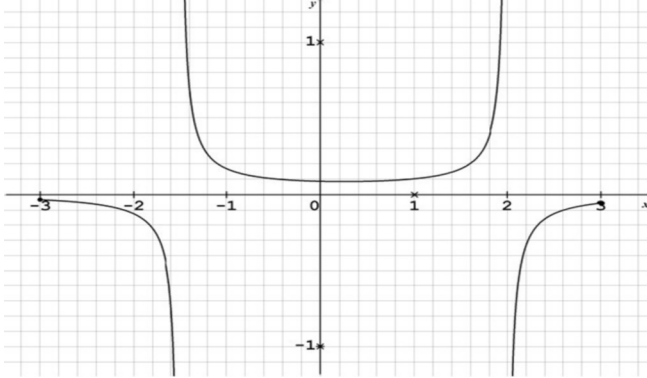
b) Calculer, si elles existent, les images par f de : -1 ; $-\frac{3}{2}$ et $\sqrt{2}$.

c) Déterminer les éventuels antécédents par f de : $\frac{4}{49}$.

3) Le plan est muni d'un repère orthogonal $(O; \vec{i}, \vec{j})$. Cf est la courbe représentative de f dans ce repère.

Les points $A\left(1; \frac{1}{10}\right)$ et $B\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{25}\right)$ appartiennent-ils à Cf ? Justifier.

4) On trace Cf sur l'intervalle $[-3; 3]$ et on obtient :



a) Déterminer graphiquement les éventuels antécédents de $-\frac{2}{5}$ par f .

b) Résoudre graphiquement (en traçant une droite sur le graphique ci-contre) l'équation : $(E_1) : f(x) = 1$.

c) **Question bonus** : Retrouver, par le calcul, les solutions de (E_1) .

II) **Partie A** : Voici un programme en langage naturel :

Variables	X est un réel de $[2 - \sqrt{17}; 2 + \sqrt{17}]$ U, V et W sont des réels
Entrée des données	Saisir X.
Traitement des données	U prend la valeur de $\sqrt{(17 - (X - 2)^2)}$ V prend la valeur de $5 - U$ W prend la valeur de $5 + U$
Sortie	Afficher V et W

A l'aide d'un tableau, préciser les valeurs que prennent les différentes variables ainsi que ce qu'affiche en sortie cet algorithme pour chacune des valeurs de X suivantes :

$$X = 3$$

$$X = -2$$

$$X = 1$$

Partie B : Dans le repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ d'unité 1 cm, on considère les points $A(-2; 6)$ et $B(6; 4)$.

1) Faire une figure sur du papier millimétré que l'on complétera au fur et à mesure.

2) On trace le cercle \mathcal{C} de centre I et de diamètre $[AB]$.

Déterminer les coordonnées du centre de ce cercle ainsi que son rayon.

3) On considère les points $C(1; y_C)$ et $D(1; y_D)$ où y_C et y_D sont les deux valeurs affichées à la sortie du programme de la partie A lorsqu'on saisit $X = 1$. ($y_C < y_D$)

a) Justifier rapidement que $y_C = 1$ et $y_D = 9$.

b) En déduire les longueurs de $[IC]$ et $[ID]$.

c) Que peut-on dire des points C et D? Justifier.

d) Quelle est la nature du triangle ABD? Justifier.

4) Dans cet exercice, à quoi semblent correspondre les valeurs renvoyées par le programme de la partie A?

III) Dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, on considère les points $A(-3 + x; 1)$ et $B(3; 2x - 1)$ où x est un réel.

1) Soit I le milieu du segment $[AB]$. Déterminer les coordonnées de I en fonction de x .

2) Déterminer en fonction de x , les coordonnées de D telles que OADB soit un parallélogramme.

3) Déterminer la (ou les) valeur(s) de x telle(s) que le triangle OAB soit isocèle en O.

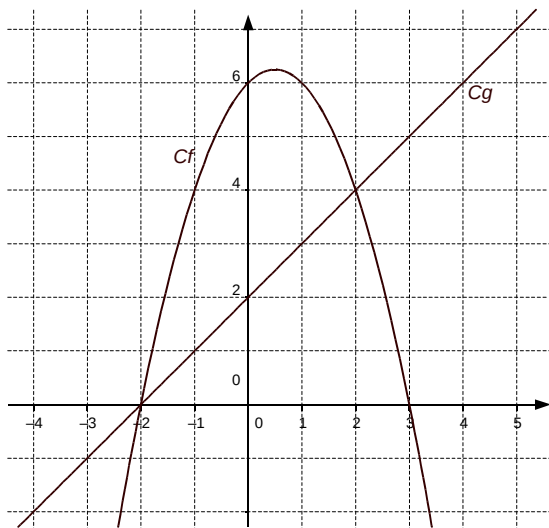
I) Dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, on donne A(4 ; 3), B(0 ; 2), C(5 ; -1) et D(5/2 ; 1/2).

- 1) Faire une figure sur votre copie.
On justifiera par des calculs les réponses aux questions ci-dessous :
- 2) Que représente D pour [BC] ?
- 3) Le point A appartient-il à la médiatrice Δ du segment [BC] ?
- 4) Déterminer les coordonnées du point d'intersection de Δ avec l'axe des ordonnées.

II) Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

Soit la fonction f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = -x^2 + x + 6$ et C_f sa représentation graphique.

Soit la fonction g définie sur \mathbb{R} par $g(x) = x + 2$ et C_g sa représentation graphique.



1) **A l'aide du graphique ci-dessus :**

- a) Quels sont les antécédents éventuels de 4 et de 7 par la fonction f ?
- b) Quelle est l'image par f de -1 ?
- c) Résoudre $f(x) = 4$. Justifier.
- d) Résoudre $f(x) > g(x)$. Justifier.
- e) Résoudre $0 \leq f(x) < 6$. Justifier.

2) **Par le calcul :**

- a) Quels sont les antécédents éventuels de 0 par la fonction f ?
- b) Quelle est l'image de $2 + \sqrt{5}$ par la fonction f ?
- c) Résoudre dans \mathbb{R} l'équation $f(x) = g(x)$.
- d) Déterminer l'ordonnée du point M de C_f qui a pour abscisse $-7/3$.

III) La distance d'arrêt $D(v)$ d'une moto de vitesse v est égale à la somme de deux distances :

- La distance de freinage de la moto, égale approximativement au carré du dixième de la vitesse v exprimée en km.h^{-1} (en mètres, sur une route sèche).
- Et la distance correspondant au temps de réaction du conducteur, égale approximativement à trois fois le dixième de la vitesse v exprimée en km.h^{-1} (en mètres, dans le cas d'une concentration normale du conducteur et d'un taux d'alcoolémie nul).

- 1) Justifier que ces approximations conduisent à : $D(v) = 0,01v^2 + 0,3v$ avec v en km.h^{-1} et $D(v)$ en m.
- 2) A l'aide de la calculatrice, faire un tableau de valeurs de la fonction D sur l'intervalle $[0; 130]$ avec un pas égal à 10.
- 3) On munit le plan d'un repère orthogonal d'unités 1 cm pour 10 unités sur l'axe des abscisses et 1 cm pour 20 unités sur l'axe des ordonnées. Tracer C_D la représentation graphique de la fonction D sur papier millimétré.
- 4) Déterminer graphiquement pour quelle vitesse de la moto, la distance d'arrêt est de 100 m.

IV) Soit f la fonction qui à n associe y . On donne l'algorithme ci-dessous :

```

Variable : n entier naturel
Initialisation :
Entrer n
Traitement des données :
Si n est pair
    Alors affecter à y la valeur n/2
    Sinon affecter à y la valeur 2n+7
Fin Si
Sortie :
Afficher y
  
```

- 1) Donner l'ensemble de définition de f .
- 2) Donner l'expression algébrique de f en distinguant deux cas.
- 3) Calculer $f(1)$, $f(2)$, $f(5)$ et $f(10)$.
- 4) Déterminer l'expression de $f(5n) - 5f(n)$ pour tout entier naturel n .

V) Pour chaque fonction, entourer son ensemble de définition :

$f(x) = \frac{-2x+1}{3x+2}$	$D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{2} \right\}$	$D_f = \left] -\frac{2}{3}; +\infty \right[$	$D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{2}{3} \right\}$
$g(x) = \frac{5x^2}{x^2+4}$	$D_g = \mathbb{R} \setminus \{-2; 2\}$	$D_g = \mathbb{R}$	$D_g = \mathbb{R}^*$
$h(x) = \frac{2x}{x\sqrt{x+3}}$	$D_h = \mathbb{R} \setminus \{-3; 0\}$	$D_h =]-3; +\infty[$	$D_h =]-3; 0[\cup]0; +\infty[$
$k(x) = \sqrt{3x+4}$	$D_k = \left[-\frac{4}{3}; +\infty \right[$	$D_k = \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{4}{3} \right\}$	$D_k = \left] -\infty; \frac{4}{3} \right]$
$l(x) = \frac{1}{\sqrt{-x}}$	$D_l = \mathbb{R}^{*-}$	$D_l = \mathbb{R}^{*+}$	$D_l = \mathbb{R}^*$

- I) Simplifier les nombres suivants,
et préciser pour chacun le plus petit ensemble de nombres auquel il appartient.

$$A = \frac{3 - \frac{2}{5} + \frac{4}{3}}{2 + \frac{4}{5} - \frac{2}{3}}$$

$$C = \left(\frac{-4^{-2} \times 8^4 \times 3^{12}}{16^2 \times 90^7 \times 30^{-2}} \right)^3$$

$$B = \sqrt{50} - 3\sqrt{2} - \sqrt{\frac{18}{4}} - \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$D = \frac{a + \frac{a}{3} - \frac{a}{2}}{2a + \frac{3a}{4} + \frac{a}{3}} \text{ avec } a \in \mathbb{R}^*$$

- II) Factoriser les expressions suivantes :

$$E = x^2 - 22x + 121$$

$$G = (3x - 7)^2 - (x + 2)^2$$

$$F = (x^2 - 16) + (x + 4)(5x + 7)$$

$$H = 2x^2 - 7x + 3$$

- III) Soit $A(x) = (x^2 - 25) - 2(5 - x)(x + 6)$.

- 1) Développer, réduire et ordonner $A(x)$.
- 2) Factoriser $A(x)$.
- 3) Choisir l'expression la mieux adaptée pour calculer : $A(\sqrt{2})$; $A(5)$; $A(-6)$

- IV) Dans chacun des cas suivants, déterminer $I \cup J$ et $I \cap J$ à l'aide d'un schéma clair.

- 1) $I =]-\infty; -2[$ et $J = [-3; +\infty[$
- 2) $I =]-3; 5]$ et $J =]4,99; 6[$
- 3) $I = [\frac{\sqrt{2}}{2}; 3[$ et $J = [3; \frac{5\sqrt{2}}{2}[$
- 4) $I =]-\infty; -7[\cup [-5; 2] \cup]3; 10[$ et $J = [-8; -6] \cup [2; +\infty[$

- V) Déterminer l'ensemble de définition de chacune des deux fonctions suivantes :

$$f: x \mapsto \frac{-8}{x^2 + 9}$$

$$g: x \mapsto \frac{7}{x} - \frac{\sqrt{1-2x}}{2}$$

- VI) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ par : $x \mapsto \frac{1+x^2}{1-x}$

- 1) Déterminer les images par f de -1 et $1 + \sqrt{3}$.
- 2) Le nombre 2 est-il un antécédent de -5 par f ?
- 3) Le point $A(0; 1)$ appartient-il à C_f ? Qu'en est-il du point $B(-1; 0)$?
- 4) Recopier et compléter le tableau de valeurs ci-dessous,
puis tracer C_f dans un repère $(O; I; J)$ d'échelle 1 cm :

x	-7	-5	-3	-1	-0,5	0	0,5	0,7	1,3	1,5	2	2,5	3	5	7	9
$f(x)$																

I) Dans un repère orthonormal $(O ; I ; J)$, on donne les points $A(-1; 1)$, $B(3; 1)$ et $C(-1; 3)$.

- 1) Déterminer la nature du triangle ABC .
- 2) Calculer les coordonnées du milieu M de $[AC]$.
- 3) Calculer les coordonnées de D symétrique de B par rapport à M .
- 4) Déterminer la nature du quadrilatère $ABCD$.

II) Résoudre dans \mathbb{R} les équations suivantes :

$$(E_1): 9(x-7)^2 = (1-2x)^2$$

$$(E_2): \sqrt{2}x + \sqrt{3} = \sqrt{2}(x+7) + \sqrt{3} - 7\sqrt{2}$$

$$(E_3): \frac{2x-3}{x+1} = \frac{2x+3}{x-2}$$

$$(E_4): -2x^2 + 12x = -14$$

III) Dans un repère orthonormé $(O ; I ; J)$, on donne les points $A(-3+x; 1)$ et $B(3; 2x-1)$ avec $x \in \mathbb{R}$.

- 1) Sur une même figure, et en utilisant 3 couleurs différentes, placer les points A et B pour $x=0$, $x=2$ et enfin $x=-2$.
- 2) Calculer les longueurs OA , OB et AB en fonction de x .
- 3) Pour quelles valeurs de x le triangle AOB est-il isocèle en O ?
- 4) Pour quelles valeurs de x les droites (OA) et (OB) sont-elles perpendiculaires ?

IV) ABC est un triangle isocèle en A (qui peut être aplati) tel que $AB = AC = 8$ cm et $BC = x$ cm.

Soit I le pied de la hauteur issue de A . On note alors f la fonction qui à x associe l'aire du triangle ABC .

- 1) Quel est l'ensemble de définition de f ?
- 2) Dans le cas où $BC = 4$ cm, montrer que l'aire de ABC est alors de $4\sqrt{15}$ cm².
- 3) On se place maintenant dans le cas général : montrer que pour tout x de D_f : $f(x) = \frac{x}{4}\sqrt{256-x^2}$
- 4) A l'aide d'une calculatrice, donner un arrondi au centième des images de 3,5 ; 5 et 10.
- 5) Tracer la représentation graphique de la fonction f dans un repère orthogonal $(O ; I ; J)$ tel que $OI = 1$ cm et $OJ = 0,2$ cm.
- 6) Résoudre graphiquement $f(x) \geq 20$.
- 7) D'après ce graphique, en quelle valeur x_0 la fonction semble-t-elle atteindre son maximum ?
On arrondira au dixième.
- 8) On cherche à trouver la valeur exacte de x_0 . Pour cela, on appelle H le pied de la hauteur du triangle ABC issue de B et on trace le cercle C de rayon $[AC]$ et de centre A .
 - a) B appartient-il à c ?
 - b) Montrer que Aire(ABC) = $4 \times BH$
 - c) L'aire de ABC est donc maximale quand la longueur BH est maximale. Quelle est alors la position de B sur le cercle ? En déduire la valeur exacte de x_0 .