# FONCTIONS 2 – PROPRIÉTÉS

## I) SIGNE

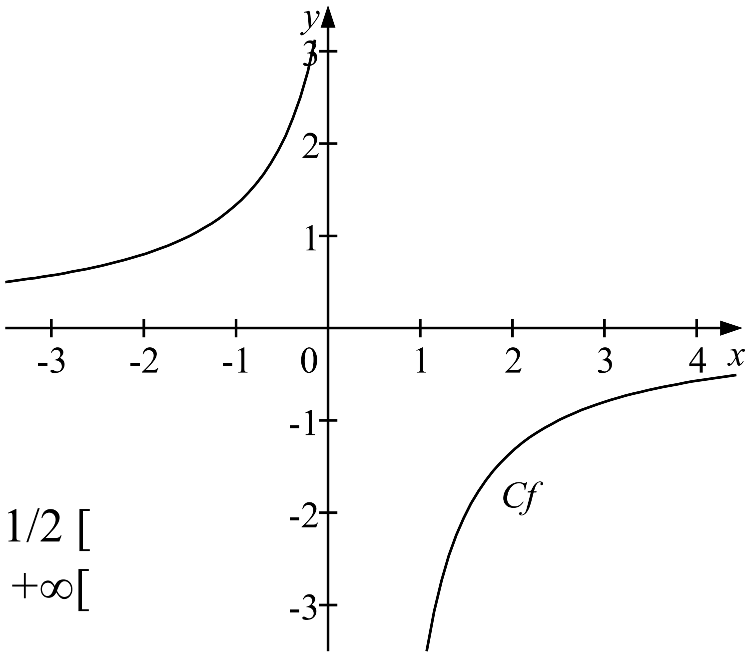
Soit $f$ une fonction définie sur un intervalle $I$

- Si, pour tout $x$ de $I$, $f(x) \geqslant 0$, alors on dit que $f$ est positive sur $I$.
  **Interprétation graphique :** $Cf$ est alors située au dessus de l'axe des abscisses.
- Si, pour tout $x$ de $I$, $f(x) \leqslant 0$, alors on dit que $f$ est négative sur $I$.
  **Interprétation graphique :** $Cf$ est alors située au dessous de l'axe des abscisses.

**Ex :** Étudier le signe de $f$ définie sur $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$ par $x \mapsto \dfrac{-4}{2x-1}$

Tableau de signe :

| $x$ | $-\infty$ | $1/2$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $-4$ | $-$ | | $-$ |
| $2x-1$ | $-$ | 0 | $+$ |
| $f(x)$ | $+$ | ‖ | $-$ |




$f$ est strictement positive sur $]-\infty\ ;\ 1/2\ [$
$f$ est strictement négative sur $]1/2\ ;\ +\infty[$

p29: 27
p83: 182, 183

## *II) EXTREMUM*

Soit $f$ une fonction définie sur un intervalle $I$ et $a$ un nombre de $I$.

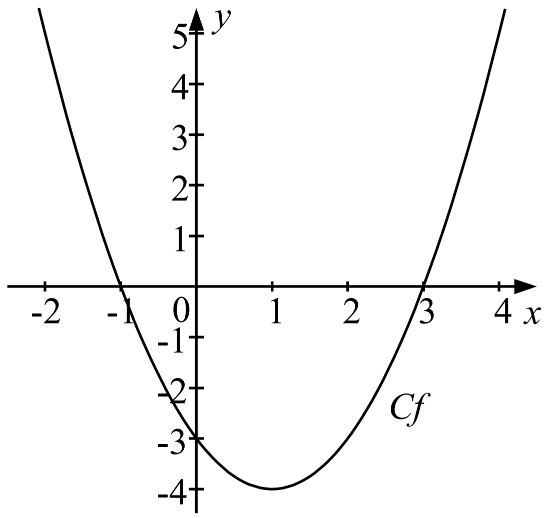
- Si, pour tout $x$ de $I$, on a $f(x) \geqslant f(a)$ alors on dit que $f$ admet un minimum de $f(a)$ en $a$ sur $I$.
  **Interprétation graphique :** Le point le plus bas de $Cf$ est le point de coordonnées $(a\,;f(a))$
- Si, pour tout $x$ de $I$, on a $f(x) \leqslant f(a)$ alors on dit que $f$ admet un maximum de $f(a)$ en $a$ sur $I$.
  **Interprétation graphique :** Le point le plus haut de $Cf$ est le point de coordonnées $(a\,;f(a))$

**Ex :** La fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto x^2 - 2x - 3$ a-t-elle un extremum ?

Pour tout $x$ de $\mathbb{R}$,
déterminons le signe de $f(x) - f(1)$ :

$$\begin{aligned} f(x) - f(1) &= x^2 - 2x - 3 - (1 - 2 - 3) \\ &= x^2 - 2x - 3 - (-4) \\ &= x^2 - 2x + 1 \\ &= (x-1)^2 \end{aligned}$$

Or un carré est toujours positif
donc $f(x) - f(1) \geqslant 0$
donc $f(x) \geqslant f(1)$ avec $f(1) = -4$
donc $f$ admet un minimum de $-4$ en 1 sur $\mathbb{R}$.



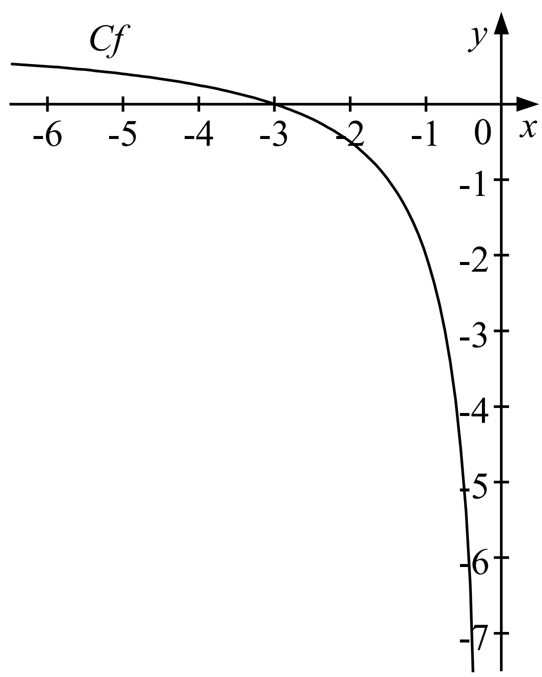

p34: 54
p111: 26, 27, 29

## *III) VARIATIONS*

Soit $f$ une fonction définie sur un intervalle $[a\ ;\ b]$.

- Si, pour tous $x_1$, $x_2$ tels que $a \leqslant x_1 < x_2 \leqslant b$, on a $f(x_1) < f(x_2)$ alors on dit que $f$ est strictement croissante sur $[a\ ;\ b]$.
  **Interprétation graphique :** $x_1$, $x_2$ et leurs images $f(x_1)$, $f(x_2)$ sont toujours dans le même ordre donc $Cf$ « monte ».
- Si, pour tous $x_1$, $x_2$ tels que $a \leqslant x_1 < x_2 \leqslant b$, on a $f(x_1) > f(x_2)$ alors on dit que $f$ est strictement décroissante sur $[a\ ;\ b]$.
  **Interprétation graphique :** $x_1$, $x_2$ et leurs images $f(x_1)$, $f(x_2)$ sont toujours dans l'ordre inverse donc $Cf$ « descend ».

**Ex :** Étudier les variations de $f$ définie sur $\mathbb{R}^{*-}$ par $x \mapsto \dfrac{3}{x}+1$




Pour tous $x_1$, $x_2$ tels que $x_1 < x_2 < 0$
déterminons le signe de $f(x_1) - f(x_2)$ :

$$f(x_1) - f(x_2) = \frac{3}{x_1} + 1 - \frac{3}{x_2} - 1$$

$$= \frac{3x_2 - 3x_1}{x_1 x_2}$$

$$= \frac{3(x_2 - x_1)}{x_1 x_2}$$

Or par hypothèses :

$x_1 < 0$ et $x_2 < 0$ donc $x_1 x_2 > 0$

$x_2 > x_1$ donc $x_2 - x_1 > 0$

Bilan : $f(x_1) - f(x_2) > 0$
donc $f(x_1) > f(x_2)$
donc $f$ est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^{*-}$

**Tableau de variations :**

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ |
|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | $\searrow$ | $\|$ |

p34: 55, 56, 58
p35: 59, 60

Algo :
p31: 35
p36: 65