

Une entreprise fabrique des bibliothèques toutes identiques en bois massif.

On appelle  $x$  le nombre de bibliothèques fabriquées dans une journée et on sait que  $x$  est toujours compris entre 5 et 20 inclus.

Le coût de fabrication en milliers d'euros de  $x$  bibliothèques, peut alors s'écrire :  $C(x) = x^2 - 10x + 50$ .

Dans la suite, on utilisera la notation : 1 K€ = 1 000 €

**Partie A :** (Attention : Justifier les réponses 1 à 3 par un calcul, une équation ou une inéquation)

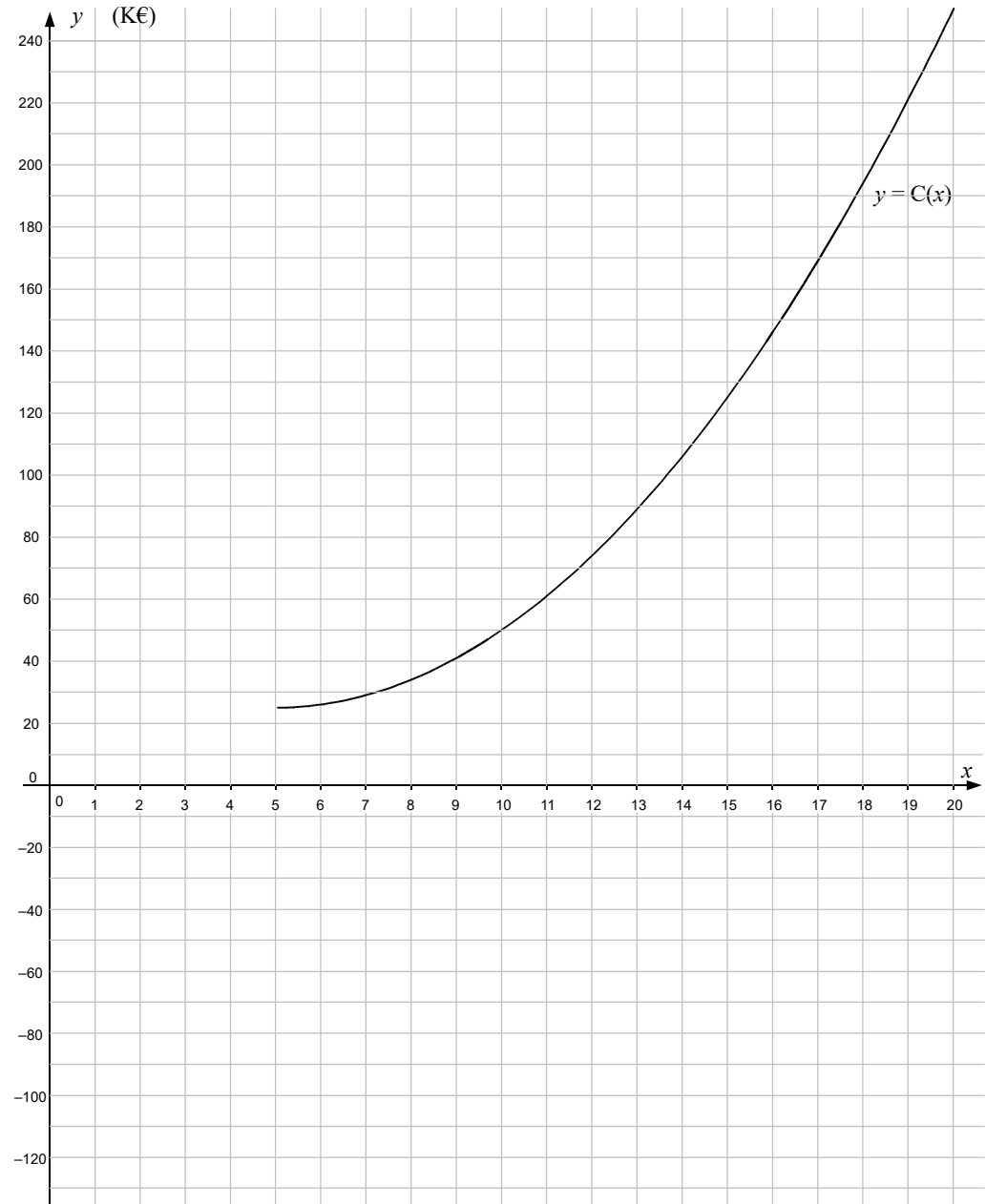
- 1) Si le coût de fabrication est de 50 K€, quel est le nombre de bibliothèques fabriquées ?
- 2) Combien coûte la fabrication de 18 bibliothèques ?
- 3) Le coût de fabrication journalier peut-il être strictement inférieur à 25 K€ ?
- 4) Chaque bibliothèque fabriquée est aussitôt vendue 5 K€. Exprimer la recette  $R(x)$  en fonction de  $x$ , en milliers d'euros.
- 5) Tracer sur le graphique ci-contre la courbe représentative de la fonction  $R$  sur  $[5 ; 20]$
- 6) Résoudre graphiquement :  $R(x) = C(x)$
- 7) Résoudre graphiquement :  $R(x) > C(x)$
- 8) Le bénéfice  $B(x)$  est la différence entre la recette et le coût de production. Montrer que, pour tout  $x$  de  $[5 ; 20]$ ,  $B(x) = -x^2 + 15x - 50$  (en milliers d'euros)
- 9) Montrer que la fonction  $B$  admet un maximum en  $15/2$  sur  $[5 ; 20]$ .
- 10) Tracer sur le graphique ci-contre la courbe représentative de la fonction  $B$

**Partie B :**

- 11) L'entreprise estime ses bénéfices insuffisants pour pouvoir investir et financer son développement. Elle décide donc d'augmenter ses tarifs de 20 %. Quel est le nouveau prix de vente d'une bibliothèque ? Quelle est la nouvelle recette  $R'(x)$  en milliers d'euros pour  $x$  appartenant à  $[5 ; 20]$  ?
- 12) Dans le même temps, la modernisation de l'atelier permet de réduire significativement les coûts de fabrication, qui s'élèvent désormais, en milliers d'euros, à  $C'(x) = x^2 - 12x + 55$ . Déterminer le nouveau bénéfice  $B'(x)$  en milliers d'euros, pour  $x$  appartenant à  $[5 ; 20]$ .
- 13) Montrer que, pour tout  $x$  de  $[5 ; 20]$  :  $-x^2 + 18x - 72 = -(x - 6)(x - 12)$
- 14) En déduire le nombre de bibliothèques que l'entreprise doit vendre pour que son bénéfice soit supérieur ou égal à 17 000 €.
- 15) On donne l'algorithme suivant :

Variables :	I entier naturel, N réel
Traitement :	Pour I allant de 5 à 20 :
	Affecter à N la valeur $-I^2 + 18I - 55$
	Si $N \geq 17$
	Afficher I
	Fin Si
	Fin Pour

Que fait cet algorithme ? Préciser les valeurs affichées par l'algorithme.



Nom :

- I) Soit  $f$  une fonction définie sur  $[-10 ; 10]$  telle que  $f(-5)=f(4)=0$  et dont le tableau de variations est ci-dessous :

$x$	-10	-7	0	6	10
$var f$	0	↗ 2	↘ -5	↗ 3	↘ 2

Pour chacune des questions ci-dessous, entourez lisiblement la ou les bonne(s) réponse(s) :

Question	Réponse 1	Réponse 2	Réponse 3
$f$ est strictement croissante sur :	$[-10 ; -7]$	$[-10 ; -7] \cup [0 ; 6]$	$[1 ; 5]$
Le maximum de $f$ sur $[-10 ; 10]$ est :	6	3	10
$Cf$ coupe l'axe des abscisses au point de coordonnées :	$(-5 ; 0)$	$(0 ; -5)$	$(4 ; 0)$
L'équation $f(x) = k$ a trois solutions distinctes si :	$k = 1$	$k = 2$	$k = 0$
L'inéquation $f(x) \leq 0$ a pour solutions :	$[-10 ; 0]$	$\{-10\} \cup [-5 ; 4]$	$\{-10\} \cap [-5 ; 4]$
L'équation $f(x+1) = 0$ a pour solutions :	$\{-10 ; -5 ; 4\}$	$\{-11 ; -6 ; 3\}$	$\{-9 ; -4 ; 5\}$
Si $a \in [2 ; 4]$ , on a :	$f(a) > f(a-1)$	$f(a) < f(a-1)$	$f(a) \geq f(a-1)$
(P) : $x \in [-10 ; -7]$ et (Q) : $f(x) \in [0 ; 2]$	(P) $\Rightarrow$ (Q)	(Q) $\Rightarrow$ (P)	(P) $\Leftrightarrow$ (Q)

- II) Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $x \mapsto x^3 - 3x^2 - 2x + 6$ . On exécute alors l'algorithme ci-dessous :

Saisir un entier naturel N  
Saisir deux réels A et B tels que  $A < B < 0$   
Pour I allant de 1 à N :  
   $\frac{A+B}{2} \rightarrow M$   
   $A^3 - 3A^2 - 2A + 6 \rightarrow F$   
   $M^3 - 3M^2 - 2M + 6 \rightarrow K$   
  Si  $F \times K < 0$   
     $M \rightarrow B$   
  Sinon  
     $M \rightarrow A$   
  Fin du Si  
Fin du Pour  
Afficher A et B

- Soit (E) l'équation :  $f(x) = 0$ .  
En traçant  $Cf$  avec une calculatrice, peut-on voir si (E) admet une solution comprise entre  $-3$  et  $-1$  ?
- On admet que  $f$  est strictement croissante sur  $[-3 ; -1]$ . En déduire un encadrement de  $f(x)$  sur cet intervalle.
- Tester l'algorithme en prenant :  
 $A = -3$  ;  $B = -1$  et  $N = 5$ .  
On résumera chacune des étapes dans un tableau avec une ligne par variable.  
Que renvoie cet algorithme et quel est le lien entre ces valeurs et la question 1 ?
- Que se passe-t-il si on augmente la valeur de N ?

- III) Partie A : Étude de fonction.

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $x \mapsto 2x^2 - 4x + 4$

- Montrer que pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}$ ,  $f(x) = 2(x-1)^2 + 2$
- Étudier le signe de  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .
- Montrer que  $f$  admet un minimum que l'on précisera.
- Étudier les variations de  $f$  sur  $\mathbb{R}$  et conclure par un tableau de variations.
- Tracer la représentation graphique de  $f$  appelée  $Cf$  dans un repère orthogonal.  
(échelle : 2 cm en abscisses ; 0,5 cm en ordonnées)
- Résoudre graphiquement puis algébriquement l'inéquation :  $f(x) \leq \frac{5}{2}$

Partie B : Cas d'une pierre « okaré » de 2 grammes.

Les pierres « okaré » sont des pierres précieuses dont la valeur en euros est égale au carré de leur masse en grammes. On a malencontreusement laissé choir une pierre « okaré » de 2 grammes qui s'est alors brisée en deux morceaux. Soit  $x$  la masse en grammes de l'un des deux morceaux.

- Quelles sont les valeurs en grammes que  $x$  peut prendre dans cette partie ?  
Quelle est la masse de l'autre morceau ?
- Quelle était, en euros, la valeur initiale de la pierre avant de tomber ?
- Montrer que la valeur totale en euros des deux morceaux est égale à  $f(x)$  (cf partie A).
- Justifier à partir des variations de  $f$  que cette valeur totale est comprise entre 2 et 4 euros.
- Exprimer le résultat de la question 6 dans le contexte d'une pierre « okaré » (une phrase suffira).

Partie C : Cas d'une pierre « okaré » de masse quelconque.

Dans cette partie, la pierre « okaré » qui s'est cassée en deux morceaux a une masse quelconque que l'on appellera  $a$  en grammes.  $x$  est toujours la masse en grammes de l'un des deux morceaux.

- Exprimer les valeurs en euro de la pierre **avant ET après** être tombée en fonction de  $x$  et de  $a$ .
- Montrer que pour tout  $x$  de  $]0 ; a[$  on a :  $x^2 + (a-x)^2 < a^2$ .
- Que peut-on en déduire concernant la valeur d'une pierre « okaré » de masse quelconque quand elle se casse en deux morceaux ?

- IV) Soit ABCD un rectangle tel que  $AB = 6$  et  $BC = 4$ .

On appelle I le milieu de  $[BC]$ , J le point tel que  $\vec{DJ} = \frac{1}{3}\vec{DC}$  et L l'intersection de  $(AI)$  et  $(BJ)$ .

- Justifier que le triplet  $(A ; \vec{AB} ; \vec{AD})$  forme un repère.
- Déterminer les coordonnées de A, B, C et D dans ce repère (justifier succinctement).
- Calculer les coordonnées de I et J dans ce repère.
- a) Justifier qu'il existe un réel  $k$  tel que  $\vec{AL} = k\vec{AI}$ .  
b) Déterminer les coordonnées de L en fonction de  $k$ .
- Justifier que le vecteur  $\vec{BL}$  est colinéaire à  $\vec{BJ}$  et en déduire la valeur de  $k$ .
- Déterminer les coordonnées de L dans le repère  $(A ; \vec{AB} ; \vec{AD})$ .

Nom :

- I) Pour chaque affirmation ci-dessous, répondre par vrai (V) ou faux (F) dans la colonne de gauche.  
Une bonne réponse entraîne : + 0,5 point ; une mauvaise : - 0,25 point et une absence de réponse : 0 point.

Pour les affirmations 1 à 7, on considère une fonction  $f$  définie sur  $[-6 ; 10]$  dont on donne le tableau de variations :

$x$	-6	-3	0	7	10
$f$	4	8	-7	-5	-6

Diagramme de variations : des flèches indiquent une augmentation de  $f$  de  $x = -6$  à  $x = -3$  (de 4 à 8) et une diminution de  $f$  de  $x = -3$  à  $x = 0$  (de 8 à -7). De  $x = 0$  à  $x = 7$ ,  $f$  augmente (de -7 à -5), et de  $x = 7$  à  $x = 10$ ,  $f$  diminue (de -5 à -6).

Vrai / Faux	Affirmation
	1) Le nombre 8 possède un seul antécédent par $f$ .
	2) Si $x > 0$ , alors $f(x) < 0$ .
	3) $f(-4) > f(3)$ .
	4) Le minimum de la fonction $f$ sur $[-6 ; 10]$ est $-6$ .
	5) La fonction $f$ atteint son maximum pour $x = -3$ .
	6) Le nombre $-5$ possède un seul antécédent par $f$ .
	7) Le nombre 10 n'a pas d'antécédent par $f$ .

Pour les affirmations 8 à 10, on considère une fonction  $g$  définie et strictement croissante sur  $]-4 ; +\infty[$ .

Vrai / Faux	Affirmation
	8) $g(0) < g(5)$
	9) La fonction $g$ atteint son minimum pour $x = -4$ .
	10) Deux nombres différents peuvent avoir la même image par $g$ .

II) Soit  $f$  la fonction définie par :  $x \mapsto \frac{12}{x^2+3}$ .

- Déterminer  $Df$ , l'ensemble de définition de  $f$ .
- Déterminer les images par  $f$  de  $-\frac{1}{2}$  et  $1+\sqrt{2}$ .
- Donner un tableau de valeurs de  $f(x)$  pour  $x$  appartenant à  $[-5 ; 5]$  avec un pas égal à 1.  
Puis tracer  $Cf$ , la courbe représentative de  $f$ , dans un repère orthonormé d'unité 1 cm.
- Soit  $g$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par :  $x \mapsto \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$ .  
Tracer la droite  $d$  représentative de  $g$  dans le même repère que  $Cf$ .
- En expliquant la méthode, résoudre graphiquement l'inéquation  $f(x) \geq g(x)$ .

III) Simplifier :  $A = \frac{\sqrt{3}+1}{2-\sqrt{3}}$

Factoriser :  $C = (x-4)^2 + (4-3x)^2 - (x+4)^2$

Simplifier :  $B = \sqrt{\frac{a^4+a^4+a^4}{4^a+4^a+4^a}}$  avec  $a \in \mathbb{N}$

Factoriser :  $D = x^3 + 4x^2 + 3x$

IV) Soit un triangle ABC.

- Placer les points D et E tels que  $\vec{BD} = \vec{AC} + 2\vec{BA}$  et  $\vec{CE} = \vec{DB} + 2\vec{AC} + 3\vec{BA}$ .
- Déterminer la nature du quadrilatère ABCD. (Justifier !)
- Calculer  $\vec{CB} + \vec{CE}$ . Que peut-on en déduire concernant le point C ?
- Montrer que les droites (AC) et (DE) sont parallèles.

Nom : 

I) Simplifier les écritures des ensembles suivants (la représentation graphique n'est pas demandée) :

$$A = [3 ; +\infty[ \cap ]-\infty ; 8]$$

$$B = [-5 ; 3[ \cap \{3\}$$

$$C = ]-\infty ; 8] \cap \mathbb{N}$$

$$D = [-6 ; 8[ \cup ]4 ; 12] \cup ]-12 ; 3[$$

$$E = [-6 ; 8[ \cap ]4 ; 12] \cap ]-12 ; 3[$$

II) Soient  $A, B, C$  et  $D$  quatre points.

1) Construire ci-dessous les points  $E, F, G$  et  $H$  tels que :

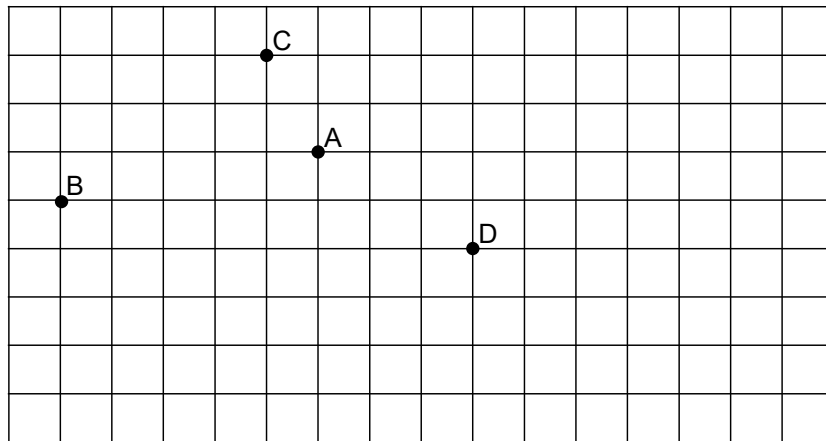
$$\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$$

$$\overrightarrow{DF} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$$

$$\overrightarrow{DG} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$$

$$\overrightarrow{DH} = -\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$$

2) Quelle est la nature du quadrilatère  $EFHG$  ? La réponse sera justifiée.



III) Soit la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = -x^2 + 4x$

1) Calculer l'image par  $f$  de  $\frac{1}{\sqrt{3}}$

2) Montrer que  $f$  admet un extremum sur  $\mathbb{R}$  que l'on précisera.

3) Étudier les variations de  $f$  puis dresser son tableau de variations.

4) a) Dresser un tableau de valeurs sur  $[-3; 7]$  avec un pas de 1.

b) Représenter  $f$  dans un repère orthogonal en prenant pour unité : 1cm en abscisse et 0,5cm en ordonnée.

5) Trouver graphiquement les antécédents éventuels de  $-5$  par  $f$ .

6) a) Résoudre graphiquement puis par le calcul  $f(x) = 0$ .

b) Résoudre graphiquement  $f(x) \geq 0$ .

7) Soient  $g$  et  $h$  les fonctions définies sur  $\mathbb{R}$  par  $g(x) = -\frac{3}{2}x$  et  $h(x) = -6 + 3x$ .

a) Tracer les droites représentant les fonctions  $g$  et  $h$  sur le graphique précédent.

b) Résoudre par le calcul  $f(x) = g(x)$ .

c) Résoudre graphiquement  $f(x) \geq h(x)$ .

8) Sans justifier, déterminer suivant les valeurs du réel  $k$  le nombre de solutions de l'équation  $f(x) = k$ .

Nom :
-------

I) Soient  $I = ]-5 ; -2[ \cup [-1 ; 5]$  et  $J = [-8 ; 0[ \cup [5 ; +\infty[$ . Donner sans justifier  $I \cup J$  puis  $I \cap J$ .

II) Cocher sur le sujet la (ou les) bonne(s) réponse(s). Une bonne réponse rapporte 0,5 point. Une absence de réponse ne rapporte pas de point. Une mauvaise réponse entraînera -0,25 point.

1) Il existe des fonctions définies sur  $\mathbb{R}$  telles que, par ces fonctions, le nombre 3 admette :

- 2 antécédents       2 images       aucun antécédent       aucune image.

2) Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$  par  $f(x) = \frac{x^2 + 3}{x + 1}$ .

L'image de 2 par  $f$  est :       1       5       7/3       4

L'image de  $-2/3$  par  $f$  est :       31/3       7/3       13       23/3

Un antécédent de 3 par  $f$  est :       3       -3       0       1

3) La fonction  $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x}}$  est définie sur :        $\mathbb{R} \setminus \{1\}$         $]-\infty ; 1]$         $]1 ; +\infty[$         $]-\infty ; 1[$

4) Soit la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = x^2 - 3x + 7$ .

La courbe représentative de  $f$  passe par :       A(2 ; 5)       B(5 ; 2)       C(-1 ; 11)       D(-2 ; 9)

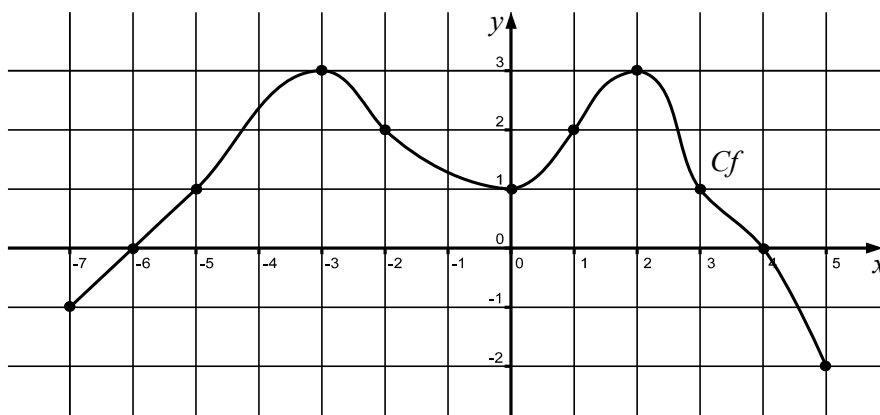
III) Dans le repère ci-dessous, on considère la représentation graphique  $C_f$  d'une fonction  $f$ .

**Répondre sans justifier :**

- 1) Quel est l'ensemble de définition de  $f$  ?
- 2) Déterminer les images de  $-2$  et  $3$  par  $f$ .
- 3) Quels sont les éventuels antécédents de  $0$  et de  $1$  ?
- 4) Quel est l'ensemble des réels qui ont exactement 4 antécédents par  $f$  ?

**Répondre en justifiant par une phrase :**

- 5) Résoudre graphiquement les équations  $f(x) = 3$  et  $f(x) = -2$ .
- 6) Résoudre graphiquement l'inéquation  $f(x) > -2$ .
- 7) Déterminer le signe de la fonction  $f$ .



IV) Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $x \mapsto -3x^2 + 6x - 1$ .

- 1) Calculer les images de  $0$  et  $-2$  par  $f$ .
- 2) Calculer les antécédents éventuels de  $-1$  par  $f$ .
- 3) Montrer que  $f$  admet un extremum sur  $\mathbb{R}$ .
- 4) Étudier les variations de  $f$  sur  $]-\infty ; 1]$ .

I) Démontrer que les nombres suivants sont entiers.

$$A = \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1} - 2\sqrt{2}$$

$$B = \frac{(a-b)^2 - (a+b)^2}{ab} \text{ avec } a \text{ et } b \text{ deux réels non nuls}$$

II) Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = x^3 + x^2 - 4x - 4$ .

- 1) Calculer l'image de  $1 - \sqrt{2}$  par  $f$ .
- 2) a) Démontrer que pour tout réel  $x$ ,  $f(x) = (x^2 - 4)(x + 1)$ .
- b) Déterminer alors les antécédents de 0 par  $f$ .

III) Soit  $f$  une fonction telle que l'ensemble des solutions de l'inéquation  $f(x) < -3$  soit  $S = ]-2; 4] \cup [7; +\infty[$ .

Pour chacune des propositions ci-dessous, dire sans justifier si elle est vraie ou fausse.

- 1) 5 est solution de l'inéquation.
- 2) Si  $x$  n'est pas solution de l'inéquation, alors  $x \leq -2$ .
- 3) Si  $x \leq -2$ , alors  $x$  n'est pas solution de l'inéquation.
- 4) Si  $x \geq 7$ , alors  $x$  est une solution de l'inéquation.
- 5)  $[-1; 3[$  est inclus dans l'ensemble des solutions.

IV) Soit  $ABC$  un triangle non aplati.

- 1) Construire le point  $D$  tel que  $\vec{BD} = \vec{AC}$ .
- 2) Construire le point  $E$  tel que  $\vec{EA} = \vec{CB}$ .
- 3) Démontrer que le point  $C$  est le milieu de  $[DE]$ .

V) Soit  $ABC$  un triangle rectangle isocèle en  $A$  tel que  $AB = 4$  cm. On considère  $I$  le milieu de  $[AC]$ ,  $M$  un point mobile sur  $[AB]$  et  $N$  l'intersection de  $[BC]$  avec la perpendiculaire à  $(AB)$  passant par  $M$ .

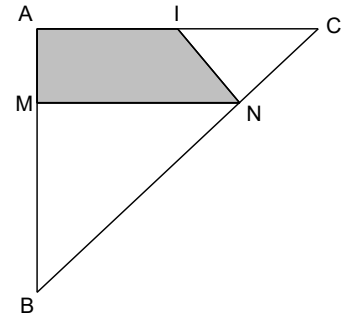
On pose  $x = BM$  et on note  $f(x)$  l'aire du trapèze  $AMNI$  en  $\text{cm}^2$ . Rappel : Aire trapèze =  $\frac{(\text{Grande base} + \text{Petite base}) \times \text{Hauteur}}{2}$

- 1) Quel est l'ensemble de définition, noté  $D_f$ , de la fonction  $f$ ?
- 2) Exprimer  $AM$ , puis  $MN$ , en fonction de  $x$ .
- 3) En déduire l'expression algébrique de  $f(x)$  pour tout  $x$  de  $[0; 4]$ .
- 4) Vérifier que, pour tout  $x$  de  $[0; 4]$ ,  $f(x) = \frac{-1}{2}(x-1)^2 + \frac{9}{2}$ .

5) Compléter le tableau ci-dessous :

$x$	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4
$f(x)$									

- 6) Sur papier millimétré, tracer la courbe  $C_f$  dans un repère orthonormal. (2 cm pour 1 unité)
- 7) Résoudre graphiquement  $f(x) \geq 2 \text{ cm}^2$ .
- 8) Déterminer graphiquement le maximum de  $f$  sur  $[0; 4]$ . Qu'est-ce que cela signifie pour le trapèze  $AMNI$ ?
- 9) En remarquant que pour tout  $x$  de  $[0; 4]$ ,  $f(x) - \frac{9}{2} = \frac{-1}{2}(x-1)^2$ , donner le signe de  $f(x) - \frac{9}{2}$  et démontrer la conjecture faite à la question précédente.



VI) Voici le tableau de variations de la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = x^2 - 3x$ .

$x$	$-\infty$	$\frac{3}{2}$	$+\infty$
$f$		$m$	

- 1) Calculer le réel  $m$ , puis calculer  $f(-1)$  et  $f(3)$ .
- 2) Donner le meilleur encadrement possible de  $f(x)$  dans chacun des cas suivants : a)  $x \in \left[-1; \frac{3}{2}\right]$  b)  $x \in [-1; 3]$
- 3)  $a$  désigne un nombre réel de l'intervalle  $\left[\frac{3}{2}; +\infty\right[$ . Comparer  $f(a)$  et  $f(a+1)$ .

Nom :

I) On donne ci-dessous le tableau de variations d'une fonction  $f$  définie sur  $[-10 ; 10]$

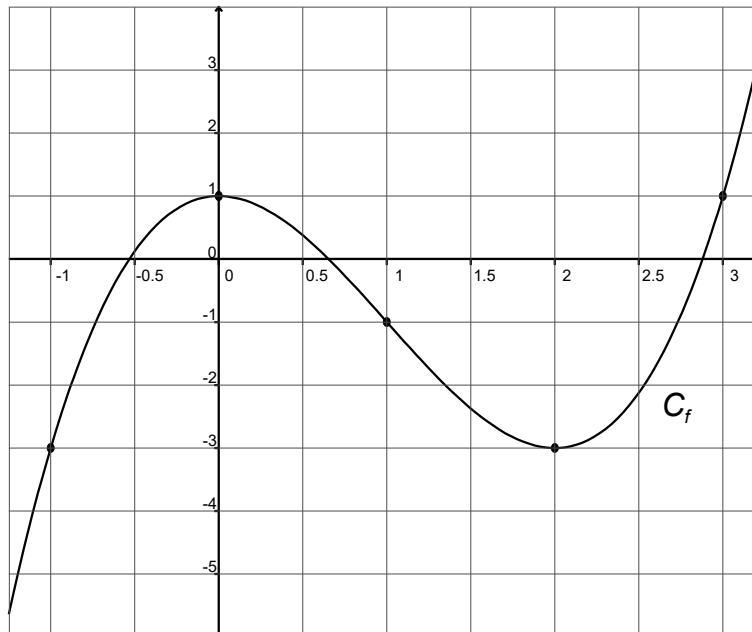
$x$	-10	-7	0	6	10
$f$	0,01	↗ 2	↘ -5	↗ 3	↘ 1

- 1) Sans justifier, compléter le tableau ci-dessous avec des croix.  
(Barème : 0,75pt si réponse juste, 0pt si pas de réponse, -0,5pt si réponse fausse)

	VRAI	FAUX	On ne peut savoir
$f(-9) < f(6)$			
$f(-6) \leq 2$			
$f(-5) > f(3)$			
$f(1) > f(3)$			

- 2) Encadrer  $f(-5)$ . (Justifier en vous appuyant sur les variations ci-dessus)  
3) Sachant que l'image par  $f$  de  $-3$  est 0, et que  $f(5)=0$ , déterminer sans justifier le signe de  $f$  en fonction de  $x$ .

II) Soit  $f$  la fonction définie sur l'intervalle  $[-1,25 ; 3,25]$  par  $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$ , et  $C_f$  sa représentation graphique ci-dessous.



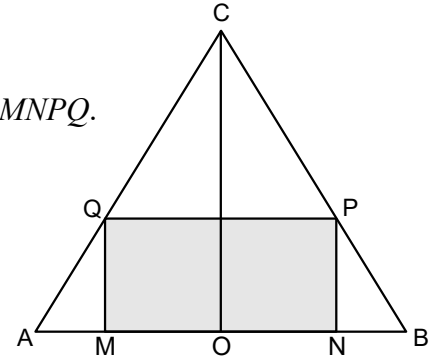
- Déterminer graphiquement et sans justifier les images par  $f$  de  $-1$  puis de  $1$ .
- Déterminer par le calcul les images par  $f$  de  $-0,5$  puis de  $-\sqrt{2}$ .
- Résoudre graphiquement les équations  $f(x) = 1$ , puis  $f(x) = x - 2$ .
- Résoudre graphiquement l'inéquation  $f(x) > -3$ .
- Déterminer par le calcul les antécédents éventuels de  $1$ .
- Déterminer graphiquement le maximum de  $f$  sur  $[-1 ; 2]$  puis démontrer ce résultat par le calcul.

I) Soit deux fonctions  $f$  et  $g$  telles que :  $f: x \mapsto \sqrt{x^2-4}$  et  $g: x \mapsto \frac{9-x}{x^2-3}$

- 1) Déterminer les domaines de définition des fonctions  $f$  et  $g$ .
- 2) a) Calculer l'image par  $f$  de  $-6$ .  
b) Calculer l'image par  $g$  de  $-2$ .
- 3) Déterminer le ou les antécédents éventuels de  $0$  par  $f$  puis par  $g$ .

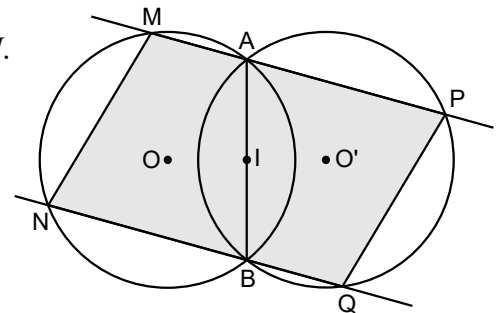
II) Soit un triangle équilatéral  $ABC$  de côté  $12$  cm et  $O$  le milieu de  $[AB]$ . Soit  $x$  un réel,  $M$  un point de  $[AO]$  et  $N$  un point de  $[OB]$ , tels que  $AM = NB = x$ . Soit enfin  $Q$  le point de  $[AC]$  et  $P$  le point de  $[BC]$  tels que  $MNPQ$  soit un rectangle. (Il n'est pas demandé de refaire la figure ci-dessous.)

- 1) A quel intervalle  $I$  appartient le réel  $x$  ?
- 2) Déterminer  $MN$  et  $MQ$  en fonction de  $x$ .
- 3) On appelle  $f$  la fonction qui à tout  $x$  de  $I$  associe l'aire  $f(x)$  du rectangle  $MNPQ$ .  
Montrer que  $f(x) = 12x\sqrt{3} - 2x^2\sqrt{3}$ .
- 4) A l'aide de la calculatrice, conjecturer :  
a) Une valeur approchée du maximum de  $f$  sur  $I$ .  
Pour quelle valeur de  $x$  ce maximum est-il atteint ?  
b) Le sens de variations de  $f$ .
- 5) Démontrer par le calcul que  $f$  admet son maximum en  $x = 3$  sur  $I$ .  
En déduire l'aire maximale de  $MNPQ$ .
- 6) Déterminer par le calcul les variations de  $f$  sur  $[0 ; 3]$  puis sur  $[3 ; 6]$ , puis établir un tableau de variations.



III) Soient  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{C}'$  deux cercles de même rayon, de centres respectifs  $O$  et  $O'$  et sécants en  $A$  et  $B$ . Soit  $I$  le milieu de  $[AB]$  et  $M$  un point de  $\mathcal{C}$  distinct de  $A$  et de  $B$ . La droite  $(MA)$  recoupe  $\mathcal{C}'$  en  $P$ . La parallèle à  $(MA)$  passant par  $B$  recoupe  $\mathcal{C}$  en  $N$  et  $\mathcal{C}'$  en  $Q$ .

- 1) Démontrer que les cercles  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{C}'$  sont symétriques par rapport à  $I$ .
- 2) Déterminer le symétrique de la droite  $(MP)$  par rapport à  $I$ .
- 3) Démontrer que le quadrilatère  $MNPQ$  est un parallélogramme.  
(Il n'est pas demandé de refaire la figure ci-contre.)



IV) **Exercice Bonus** : Voici un programme écrit en Python :

```
a=input("Entrez un premier entier positif : ")
b=input("Entrez un second entier positif : ")
i=2
while i<=a and i<=b:
    if a%i==0 and b%i==0:
        a=a/i
        b=b/i
    else:
        i=i+1
print "Et hop, je trouve", a, "et", b
```

- 1) Déterminer sans justifier quelle sera la réponse du programme dans chacun des cas suivants :  
a) L'utilisateur a entré 6 et 18                      c) Il a entré 45 et 30  
b) Il a entré 7 et 3                                      d) Il n'a pas respecté la consigne et a entré  $-5$  et  $1$ .
- 2) Finalement, que semble faire ce programme ?