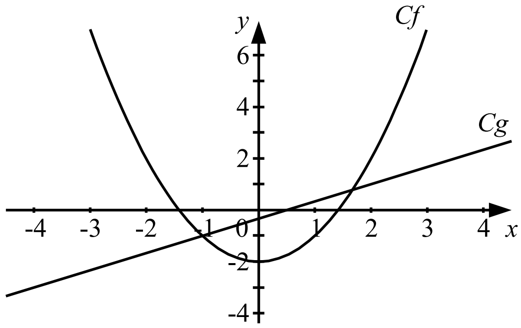
FONCTIONS 3 – COURBES

Soient les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f : x \mapsto x^2 - 2$$

$$g : x \mapsto \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}$$



I) INTERSECTION DE DEUX COURBES

1) Coordonnées des points d'intersections de *Cf* et *Cg*.

Résolvons $(E) : f(x) = g(x)$

$(E) \Leftrightarrow x^2 - 2 = \frac{2}{3}x - \frac{1}{3}$

$(E) \Leftrightarrow x^2 - \frac{2}{3}x - 2 + \frac{1}{3} = 0$

$(E) \Leftrightarrow x^2 - \frac{2}{3}x - \frac{5}{3} = 0$

$(E) \Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{3}\right)^2 - \frac{1}{9} - \frac{15}{9} = 0$

$(E) \Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{3}\right)^2 - \left(\frac{4}{3}\right)^2 = 0$

$(E) \Leftrightarrow \left(x - \frac{1}{3} - \frac{4}{3}\right)\left(x - \frac{1}{3} + \frac{4}{3}\right) = 0$

$(E) \Leftrightarrow \left(x - \frac{5}{3}\right)(x + 1) = 0$

$(E) \Leftrightarrow x = \frac{5}{3}$ ou $x = -1$

Donc $M(x\,;y) \in Cf \cap Cg$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = f(x) \\ y = g(x) \\ x \in Df \cap Dg \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x) \\ y = x^2 - 2 \\ x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \text{ ou } x = \frac{5}{3} \\ y = x^2 - 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = -1 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x = \frac{5}{3} \\ y = \frac{7}{9} \end{cases}$$

Il y a donc deux points d'intersections entre ces deux courbes :

$A(-1\,;-1)$ et $B\left(\frac{5}{3};\frac{7}{9}\right)$.

p112: 33
p119: 80

2) Coordonnées des points d'intersections de *Cf* avec les axes.

a) Avec l'axe des abscisses :

Résolvons l'équation $(E): f(x)=0$

$(E) \Leftrightarrow x^2-2=0$

$(E) \Leftrightarrow (x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})=0$

$(E) \Leftrightarrow x=\sqrt{2} \text{ ou } x=-\sqrt{2}$

Donc $M(x\,;y) \in Cf \cap (Ox) \Leftrightarrow \begin{cases} y=f(x) \\ y=0 \\ x\in Df \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} f(x)=0 \\ y=0 \\ x\in\mathbb{R} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=\sqrt{2} \text{ ou } x=-\sqrt{2} \\ y=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=\sqrt{2} \\ y=0 \end{cases} \text{ou} \begin{cases} x=-\sqrt{2} \\ y=0 \end{cases}$$

Il y a donc 2 points d'intersections avec (Ox) : $A(-\sqrt{2}\,;0)$ et $B(\sqrt{2}\,;0)$.

b) Avec l'axe des ordonnées :

$M(x\,;y) \in Cf \cap (Oy) \Leftrightarrow \begin{cases} y=f(x) \\ x=0 \\ x\in Df \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=x^2-2 \\ x\in\mathbb{R} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=-2 \end{cases}$$

Le point d'intersection avec (Oy) est : $C(0\,;-2)$.

II) POSITION RELATIVE DE DEUX COURBES

Ex : Déterminer la position relative de Cf et Cg en fonction de x.

Pour tout x de $\mathbb{R}$, étudions le signe de $f(x) - g(x)$:

$$\begin{aligned}
f(x) - g(x) &= x^2 - 2 - \left(\frac{2}{3}x - \frac{1}{3}\right) \\
&= x^2 - \frac{2}{3}x - \frac{6}{3} + \frac{1}{3} \\
&= x^2 - \frac{2}{3}x - \frac{5}{3} \\
&= \left(x - \frac{1}{3}\right)^2 - \frac{1}{9} - \frac{15}{9} \\
&= \left(x - \frac{1}{3}\right)^2 - \left(\frac{4}{3}\right)^2 \\
&= \left(x - \frac{1}{3} - \frac{4}{3}\right)\left(x - \frac{1}{3} + \frac{4}{3}\right) \\
&= \left(x - \frac{5}{3}\right)(x+1)
\end{aligned}$$

x	$-\infty$		-1		$5/3$		$+\infty$
$x - \frac{5}{3}$		$-$	|	$-$	0	$+$	
$x+1$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$f(x) - g(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Bilan :

- Si $x \in\ ]-\infty\ ; -1[\ \cup\ ]5/3\ ; +\infty[$, alors $f(x) - g(x) > 0$ donc $f(x) > g(x)$ donc Cf est située au dessus de Cg.
- Si $x \in\ ]-1\ ; 5/3[$, alors $f(x) - g(x) < 0$ donc $f(x) < g(x)$ donc Cf est située au dessous de Cg.
- Si $x = -1$ ou $x = 5/3$, alors $f(x) - g(x) = 0$ donc $f(x) = g(x)$ donc Cf et Cg sont sécantes.