2G DS de mathématiques 2h calculatrice autorisée 24V16

Nom :

I) **Question de cours :**

1) a) Soit f la fonction affine définie sur ℝℝ par $f(x) = mx + p$. (m ∈∈ ℝ et $p \in$ ℝ)
Donner, sans justifier, le sens de variation de f en fonction de m et p.
b) Donner, sans justifier, le tableau de variation de la fonction carré.
c) Donner, sans justifier, le tableau de variation de la fonction inverse.

2) Sans calculs, **et en utilisant les résultats du 1)** :
a) Comparer $\left(-1-\sqrt{3}\right)^2$ et $\left(-2-\sqrt{3}\right)^2$ b) Comparer $\dfrac{1}{-\pi+2}$ et $\dfrac{1}{-3{,}14+2}$

II) **Partie A : Étude d'une fonction** *Les parties A et B de cet exercice sont indépendantes.*

Soit la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{x^2+4}{x^2+1}$

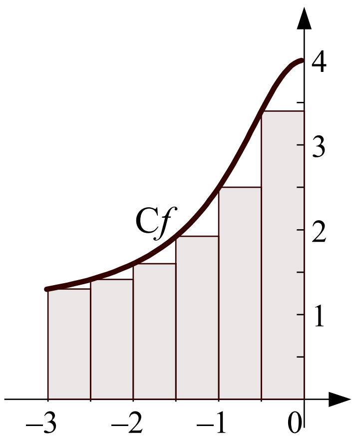
Le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}\,;\vec{i}\,,\vec{j}\right)$. On appelle Cf la courbe représentative de la fonction f.

1) Déterminer Df, l'ensemble de définition de f.
2) Montrer que, pour tout réel x de Df : $f\left(x\right)=1+\dfrac{3}{x^2+1}$
3) Montrer que f admet un maximum sur ℝ que l'on précisera.
4) Déterminer le sens de variation de f sur $]-\infty\,;0]$ en utilisant la méthode des encadrements successifs.
5) Déterminer par le calcul les coordonnées des points d'intersection de Cf avec l'axe des abscisses.
6) a) Montrer que pour tout réel x, on a : $x^2+x+1=\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}$
b) En déduire les positions relatives de Cf et de la droite d d'équation $y = 3x+4$.

Partie B : Approximation d'une aire par la méthode des rectangles

On souhaite connaître l'aire comprise entre Cf et l'axe des abscisses sur l'intervalle $[-3\,;0]$.
Pour cela, on découpe ci-dessous cet intervalle $[-3\,;0]$ en petits intervalles de même largeur et on calcule l'aire des rectangles grisés.
Pour automatiser ce calcul, on écrit l'algorithme suivant :

Affecter à S la valeur 0
Affecter à d la valeur 0,5
Affecter à x la valeur –3
Tant que x<0
    Affecter à y la valeur de $\dfrac{x^2+4}{x^2+1}$
    Affecter à S la valeur de S+y×d
    Affecter à x la valeur de x+d
Fin tant que
Afficher S



1) Compléter le tableau ci-dessous en changeant de colonne à chaque fin de boucle, juste après « Affecter à x la valeur de x+d ». (Arrondir au dixième les valeurs de y)

y	1,3					
S	0,65					
x	−2,5					

Quelle est la valeur retournée en fin d'algorithme ?

2) Que représente la variable d ? le calcul y×d ? la variable S ?
3) Pour l'instant l'approximation est grossière. Quelle variable faut-il modifier pour la rendre plus précise ?
4) Programmer cet algorithme sur votre calculatrice et le recopier sur votre copie.
Donner une approximation de l'aire recherchée au dixième près.

BARÈME PROBABLE : I) 4,25pts II) Partie A 10,25pts Partie B 5,5pts

I) Une urne contient 4 jetons indiscernables au toucher marqués A, B, C et D. On décide de tirer successivement trois jetons dans l'urne sans les y remettre.
1) Dessiner un arbre permettant de lire tous les résultats possibles de cette expérience aléatoire.
2) Quelle est la probabilité d'obtenir à la suite B puis D ?
3) Quelle est la probabilité d'obtenir le jeton C en deuxième position ?
4) Quelle est la probabilité que le jeton restant dans l'urne en fin de tirage soit le A ?

II) À la gare, sur deux guichets A et B, il y en a toujours au moins un qui est ouvert.
On considère les événements A : « Le guichet A est ouvert » et B : « Le guichet B est ouvert ».
Une étude statistique sur la dernière année a montré que p(A) = 0,73 et p(B) = 0,54.
Un client arrive à la gare. Quelle est la probabilité qu'il trouve les deux guichets ouverts ?

III) Soient f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=8-2(x+1)^2$
et g la fonction définie sur $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$ par $g(x)=8-\dfrac{2}{x+1}$
1) Montrer que f admet un extremum que l'on précisera.
2) Déterminer le signe de g. Interpréter graphiquement.
3) Déterminer les variations de f en étudiant le signe de $f(x_1)-f(x_2)$. Conclure par un tableau de variations.
4) Déterminer les variations de g par encadrements successifs. Conclure par un tableau de variations.
5) Représenter graphiquement les deux fonctions dans un repère orthonormé d'unité 1cm.
6) Déterminer les coordonnées des points d'intersection de Cf avec les axes
7) Déterminer les positions relatives de Cf et Cg.
(On pourra s'aider de l'identité remarquable : $a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$)

BAREME PROBABLE : I) 5pts II) 2pts III) 13pts

I) On s'intéresse à la distance entre l'établissement et le domicile des élèves de deux classes : Les secondes 1 et les secondes 2. Les résultats sont rassemblés dans les tableaux ci-dessous. En seconde 2, on suppose que les effectifs sont repartis uniformément au sein des classes.

Seconde 1 :	Distance en km	0,5	1	1,5	2	2,5	3	4
	Nombre d'élèves	4	7	5	8	3	2	3

Seconde 2 :	Distance en km	[0 ; 1[	[1 ; 2[	[2 ; 3[	[3 ; 5[	[5 ; 8[	[8 ; 10[
	Nombre d'élèves	5	9	9	6	4	3

En seconde 1 :

1) Calculer la distance moyenne parcourue par les secondes 1. Arrondir le résultat au centième de km.
2) Calculer la médiane, le premier quartile et le troisième quartile de la série statistique de la seconde 1. Interpréter concrètement les résultats trouvés.
3) Tracer le diagramme en boîte de cette série statistique.

En seconde 2 :

4) Calculer la moyenne approchée de la série statistique de la seconde 2.
5) Tracer le polygone des effectifs cumulés croissants en prenant pour unité 1 cm sur l'axe des abscisses et 0,5 cm sur l'axe des ordonnées.
6) Graphiquement, lire une valeur approchée de la médiane. Justifier.

II) On dispose de trois urnes U, V et W.
L'urne U contient deux boules indiscernables au toucher portant les numéros 1 et 2.
L'urne V contient deux boules indiscernables au toucher portant les numéros 2 et 3.
L'urne W contient trois boules indiscernables au toucher portant les numéros 1, 2 et 3.
On prend au hasard une boule de l'urne U dont le numéro est noté x, puis une boule de l'urne V dont le numéro est y, puis une boule de l'urne W dont le numéro est z. On note le triplet (x, y, z) ainsi obtenu.
Toutes les probabilités seront données sous forme de fractions irréductibles.

1) Représenter cette situation à l'aide d'un arbre. Soit Ω l'ensemble des issues trouvées. Quel est le nombre d'éléments de Ω ?
2) On considère les événements suivants :
   A : « $x \leq z$ »
   B : « x, y et z sont distincts deux à deux »
   C : « $x + y + z = 6$ »
   a) Décrire sous forme d'ensembles puis calculer la probabilité des événements A, B et C.
   b) Même question pour les événements : $A \cap C$; $B \cap C$; $A \cup C$ et $B \cup C$.

III) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\begin{cases} -x-5 & \text{si } x<1 \\ 5x-11 & \text{si } x\geqslant 1 \end{cases}$

1) Calculer les images de – 4, de $\frac{3}{2}$ et de 1 par f.
2) Déterminer les variations de f sur $\mathbb{R}$, puis dresser le tableau de variations de f.
3) Résoudre algébriquement dans $\mathbb{R}$: $(I): f(x)>2$.

IV) Partie A : Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=-\frac{x^2}{4}-x+3$.

1) Donner, pour tout x appartenant à D_f, la forme canonique de $f(x)$
2) Étudier les variations de f sur $]-\infty ; -2]$ par la méthode des encadrements successifs.
3) Étudier les variations de f sur $[-2 ; +\infty[$ par la méthode de la différence.
4) Dresser le tableau de variations de f sur D_f.
5) Sur un papier millimétré, dans un repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ du plan, tracer C_f la courbe représentative de f sur $[-8 ; 8]$ en prenant pour unité 1,5cm sur l'axe des abscisses et 0,5cm sur l'axe des ordonnées.

Partie B : Soit la fonction $g : x \mapsto \frac{2x-63}{3x-1}$.

1) Donner l'ensemble de définition D_g.
2) Démontrer que, pour tout x appartenant à D_g, $g(x)=\frac{2}{3}-\frac{187}{9x-3}$.
3) Par la méthode de votre choix, étudier les variations de g sur l'un des intervalles au choix de D_g. Quelle sera la variation de g sur l'autre intervalle ? Justifier rapidement.
4) Dresser le tableau de variations de g sur D_g.
5) Sur le même graphique que dans la partie A, tracer C_g la courbe représentative de g sur $[-8 ; 8]$.

Partie C :

1) Graphiquement, déterminer les positions relatives des courbes C_f et C_g sur $[-8 ; 8]$.
2) Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x)=\begin{cases} f(x) & \text{si } x\leqslant 4 \\ g(x) & \text{si } x>4 \end{cases}$
   A l'aide d'une couleur de votre choix, tracer la représentation graphique de h.

V) On considère l'algorithme ci-dessous en langage naturel :

```
Saisir M
Affecter à S la valeur de M
Affecter à I la valeur 2012
Tant que
    Affecter à S son ancienne valeur multipliée par 1,015.
    Affecter à I son ancienne valeur à laquelle on ajoute 1.
Fin du Tant que
Afficher I
```

En 2012, Clara verse sur un livret d'épargne la somme de 1000 euros.
On souhaite que le programme précédent représente cette situation.

1) Que faut-il saisir pour M ?
2) A quel taux s'élèvent les intérêts sur ce compte-épargne ?
3) Traduire ce programme dans le langage de votre calculatrice et recopier ce programme sur la copie en précisant le modèle de calculatrice utilisée.
4) Quelle valeur renvoie alors le programme ? Que représente cette valeur ?
5) Que renvoie le programme pour M = 50, M = 2567 et pour M = 150 300 ?
   Donner une interprétation de ces résultats dans le contexte bancaire.

BAREME PROBABLE : I) 3,5 pts II) 3,25 pts III) 3 pts IV) 8,25 pts V) 2 pts