FONCTIONS 5 – FONCTIONS POLYNÔMES + HOMOGRAPHIQUES

I) FONCTIONS POLYNÔMES DE DEGRÉ 2

1) Définition

On appelle fonction polynôme de degré 2 toute fonction f définie sur ℝ qui peut s'écrire sous la forme $f(x) = a\,x^2 + b\,x + c$ ou a, b et c sont des réels et $a \neq 0$.

On admet alors que $f(x)$ peut aussi s'écrire sous la forme :
$f(x) = a\,(x - \alpha)^2 + \beta$ ou a, α et β sont des réels et $a \neq 0$.
Cette nouvelle écriture est appelée « forme canonique » de $f(x)$.

Ex : Soit $f(x) = 2\,x^2 + 4\,x + 8$
Pour tout x de ℝ, $f(x)=2(x^2+2x+4)$
$f(x)=2((x+1)^2-1+4)$
$f(x)=2((x+1)^2+3)$
$f(x)=2(x+1)^2+6$

2) Représentation graphique

La mise de $f(x)$ sous la forme canonique $f(x) = a\,(x - \alpha)^2 + \beta$ permet de mettre en évidence que la représentation graphique d'une fonction polynôme de degré 2 est une parabole de sommet $\Omega(\alpha\,;\,\beta)$.
- Si $a > 0$, cette parabole à son sommet en bas.
- Si $a < 0$, cette parabole à son sommet en haut.

3) Dans les exercices

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto -x^2-4x-1$

a) Forme canonique de f (x)

Pour tout x de $\mathbb{R}$,
$$f(x)=-x^2-4x-1$$
$$f(x)=-(x^2+4x+1)$$
$$f(x)=-((x+2)^2-4+1)$$
$$f(x)=-((x+2)^2-3)$$
$$f(x)=-(x+2)^2+3$$

b) Variations sur $]-\infty\ ;-2]$

Pour tous x_1, x_2 tels que $x_1 < x_2 \leqslant -2$

on a $x_1+2 < x_2+2 \leqslant 0$

la fonction carrée est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^-$

donc $(x_1+2)^2 > (x_2+2)^2 \geqslant 0$

donc $-(x_1+2)^2 < -(x_2+2)^2 \leqslant 0$

donc $-(x_1+2)^2+3 < -(x_2+2)^2+3 \leqslant 3$

donc $f(x_1) < f(x_2)$

donc f est strictement croissante sur $]-\infty\ ;-2]$

Variations sur $[-2\ ;+\infty[$

Pour tous x_1, x_2 tels que $-2 \leqslant x_1 < x_2$

on a $0 \leqslant x_1+2 < x_2+2$

la fonction carrée est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$

donc $0 \leqslant (x_1+2)^2 < (x_2+2)^2$

donc $0 \geqslant -(x_1+2)^2 > -(x_2+2)^2$

donc $3 \geqslant -(x_1+2)^2+3 > -(x_2+2)^2+3$

donc $f(x_1) > f(x_2)$

donc f est strictement décroissante sur $[-2\ ;+\infty[$

Tableau de variations

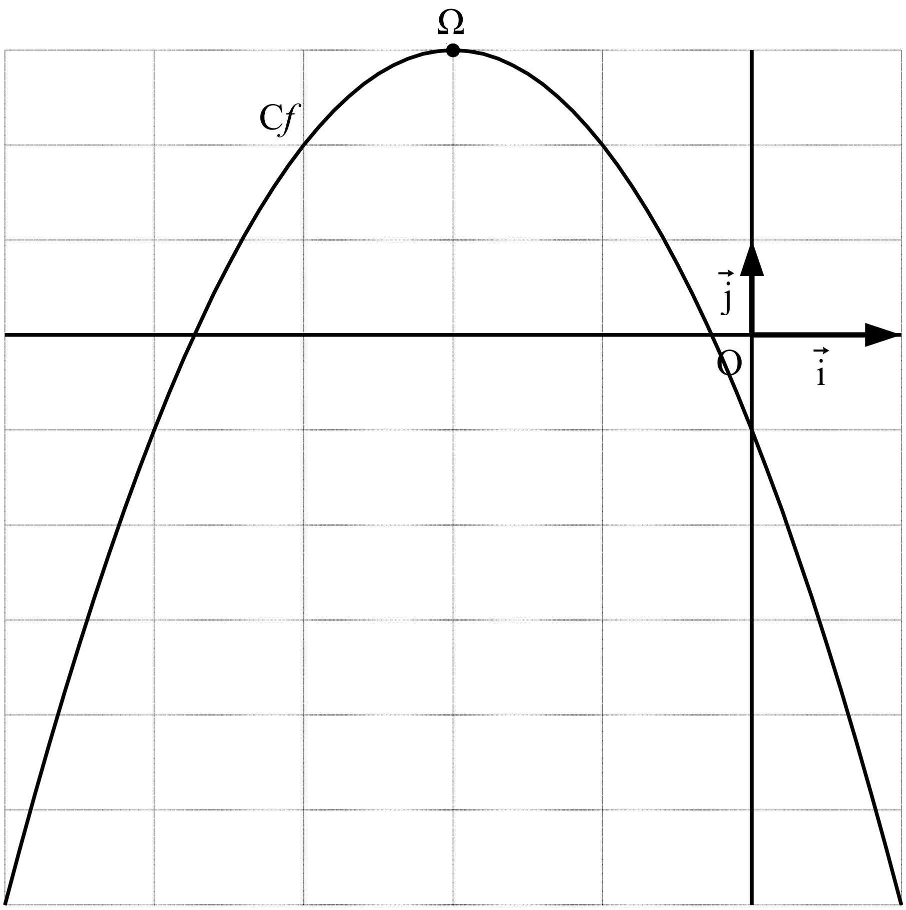
x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$f(x)$		$\nearrow$	3	$\searrow$	

c) Nature de la courbe et coordonnées du sommet

f est une fonction polynôme du second degré donc Cf est une parabole.
La forme canonique de $f(x)$ est $-(x+2)^2+3$ donc Cf a pour sommet le point $\Omega(-2\,;\,3)$.

d) Tableau de valeurs et courbe

x	-5	-4	-3	$-2{,}5$	-2	$-1{,}5$	-1	0	1
$f(x)$	-6	-1	2	$2{,}75$	3	$2{,}75$	2	-1	-6



p108: 2, 4
p110: 18, 24
p111: 28
p113: 35
p119: 78, 79

II) FONCTIONS HOMOGRAPHIQUES

1) Définition

On appelle fonction homographique toute fonction f qui peut s'écrire sous la forme $f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}$ ou a, b, c et d sont des réels tels que :

- $c \neq 0$
- a et b ne soient pas proportionnels à c et d

Une telle fonction est définie sur $\mathbb{R}-\left\{-\frac{d}{c}\right\}$

On admet alors que $f(x)$ peut aussi s'écrire sous la forme :

$f(x)=\frac{k}{x-\alpha}+\beta$ ou k, α et β sont des réels et $k \neq 0$.

Cette nouvelle écriture est appelée « forme réduite » de $f(x)$.

Ex : Soit $f(x)=\frac{x-9}{4x-4}$

Pour tout x de $\mathbb{R} - \{1\}$, $f(x)=\frac{\frac{1}{4}x-\frac{9}{4}}{x-1}$

$$f(x)=\frac{\frac{1}{4}(x-1)+\frac{1}{4}-\frac{9}{4}}{x-1}$$

$$f(x)=\frac{\frac{1}{4}(x-1)-2}{x-1}$$

$$f(x)=\frac{1}{4}-\frac{2}{x-1}$$

2) Représentation graphique

La mise de $f(x)$ sous la forme réduite $f(x)=\frac{k}{x-\alpha}+\beta$ permet de mettre en évidence que la représentation graphique d'une fonction homographique est une hyperbole de centre de symétrie $\Omega(\alpha\,;\,\beta)$ qui admet pour asymptotes les droites d'équations $x=\alpha$ et $y=\beta$.

3) Dans les exercices

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} - \{-2\}$ par $x \mapsto \dfrac{2x+7}{3x+6}$

a) Forme réduite de f (x)

Pour tout x de $\mathbb{R} - \{-2\}$, $f(x)=\dfrac{\frac{2}{3}x+\frac{7}{3}}{x+2}$

$$f(x)=\frac{\frac{2}{3}(x+2)-\frac{4}{3}+\frac{7}{3}}{x+2}$$

$$f(x)=\frac{\frac{2}{3}(x+2)+1}{x+2}$$

$$f(x)=\frac{2}{3}+\frac{1}{x+2}$$

b) Variations sur $]-\infty\,;\,-2[$

Pour tous x_1, x_2 tels que $x_1 < x_2 < -2$

on a $x_1 + 2 < x_2 + 2 < 0$

la fonction inverse est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^{*-}$

donc $\dfrac{1}{x_1+2} > \dfrac{1}{x_2+2}$

donc $\dfrac{2}{3}+\dfrac{1}{x_1+2} > \dfrac{2}{3}+\dfrac{1}{x_2+2}$

donc $f(x_1) > f(x_2)$

donc f est strictement décroissante sur $]-\infty\,;\,-2[$

Variations sur $]-2\,;\,+\infty[$

Pour tous x_1, x_2 tels que $-2 < x_1 < x_2$

on a $0 < x_1 + 2 < x_2 + 2$

la fonction inverse est strictement décroissante sur $\mathbb{R}^{*+}$

donc $\dfrac{1}{x_1+2} > \dfrac{1}{x_2+2}$

$$\text{donc} \quad \frac{2}{3}+\frac{1}{x_1+2} > \frac{2}{3}+\frac{1}{x_2+2}$$

$$\text{donc} \quad f(x_1) > f(x_2)$$

donc f est strictement décroissante sur $]-2\ ;\ +\infty[$

Tableau de variations

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$f(x)$	$\searrow$	||	$\searrow$

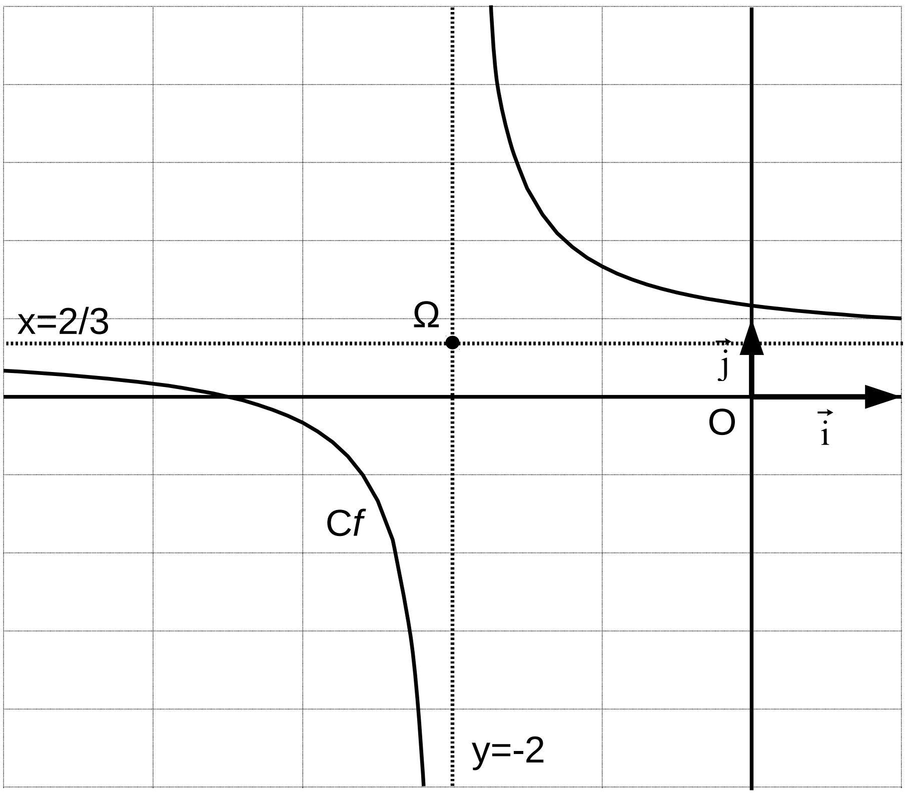
c) Nature de la courbe, coordonnées du sommet, asymptotes

f est une fonction homographique donc Cf est une hyperbole.

La forme canonique de $f(x)$ est $\frac{2}{3}+\frac{1}{x+2}$ donc Cf a pour centre de symétrie le point $\Omega(-2\ ;\ 2/3)$ et pour asymptotes les droites d'équations : $x = -2$ et $y = 2/3$.

d) Tableau de valeurs et courbe

x	–5	–4	–3	–2,5	–2,2	–1,8	–1,5	–1	0	1
$f(x)$	0,33	0,17	–0,33	–1,33	–4,33	5,67	2,67	1,67	1,17	1



p113: 38