

# FONCTIONS 5 – FONCTIONS POLYNÔMES + HOMOGRAPHIQUES

---

## I) FONCTIONS POLYNÔMES DE DEGRÉ 2

### 1) Définition

On appelle fonction polynôme de degré 2 toute fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  qui peut s'écrire sous la forme  $f(x) = a x^2 + b x + c$  ou  $a, b$  et  $c$  sont des réels et  $a \neq 0$ .

On admet alors que  $f(x)$  peut aussi s'écrire sous la forme :

$$f(x) = a (x - \alpha)^2 + \beta \text{ ou } a, \alpha \text{ et } \beta \text{ sont des réels et } a \neq 0.$$

Cette nouvelle écriture est appelée « forme canonique » de  $f(x)$ .

**Ex :** Soit  $f(x) = 2 x^2 + 4 x + 8$

Pour tout  $x$  de  $\mathbb{R}$ ,  $f(x) =$

### 2) Représentation graphique

La mise de  $f(x)$  sous la forme canonique  $f(x) = a (x - \alpha)^2 + \beta$  permet de mettre en évidence que la représentation graphique d'une fonction polynôme de degré 2 est une parabole de sommet  $\Omega( \quad )$ .

- Si  $a > 0$ , cette parabole a son sommet en
- Si  $a < 0$ , cette parabole a son sommet en

### 3) Dans les exercices

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $x \mapsto -x^2 - 4x - 1$

#### a) Forme canonique de $f(x)$

$$\text{Pour tout } x \text{ de } \mathbb{R}, f(x) = -x^2 - 4x - 1$$

$$f(x) = -(x^2 + 4x + 1)$$

$$f(x) = -((x+2)^2 - 4 + 1)$$

$$f(x) = -((x+2)^2 - 3)$$

$$f(x) = -(x+2)^2 + 3$$

#### b) Variations sur $]-\infty ; -2]$

Pour tous  $x_1, x_2$  tels que  $x_1 < x_2 \leq -2$

$$\text{on a } x_1 + 2 < x_2 + 2 \leq 0$$

la fonction carrée est strictement décroissante sur  $\mathbb{R}^-$

$$\text{donc } (x_1 + 2)^2 > (x_2 + 2)^2 \geq 0$$

$$\text{donc } -(x_1 + 2)^2 < -(x_2 + 2)^2 \leq 0$$

$$\text{donc } -(x_1 + 2)^2 + 3 < -(x_2 + 2)^2 + 3 \leq 3$$

$$\text{donc } f(x_1) < f(x_2)$$

donc  $f$  est strictement croissante sur  $]-\infty ; -2]$

#### Variations sur $[-2 ; +\infty[$

Pour tous  $x_1, x_2$  tels que  $-2 \leq x_1 < x_2$

$$\text{on a } 0 \leq x_1 + 2 < x_2 + 2$$

la fonction carrée est strictement croissante sur  $\mathbb{R}^+$

$$\text{donc } 0 \leq (x_1 + 2)^2 < (x_2 + 2)^2$$



$$\text{donc } 0 \geq -(x_1 + 2)^2 > -(x_2 + 2)^2$$

$$\text{donc } 3 \geq -(x_1 + 2)^2 + 3 > -(x_2 + 2)^2 + 3$$

$$\text{donc } f(x_1) > f(x_2)$$

donc  $f$  est strictement décroissante sur  $[-2 ; +\infty[$

#### Tableau de variations

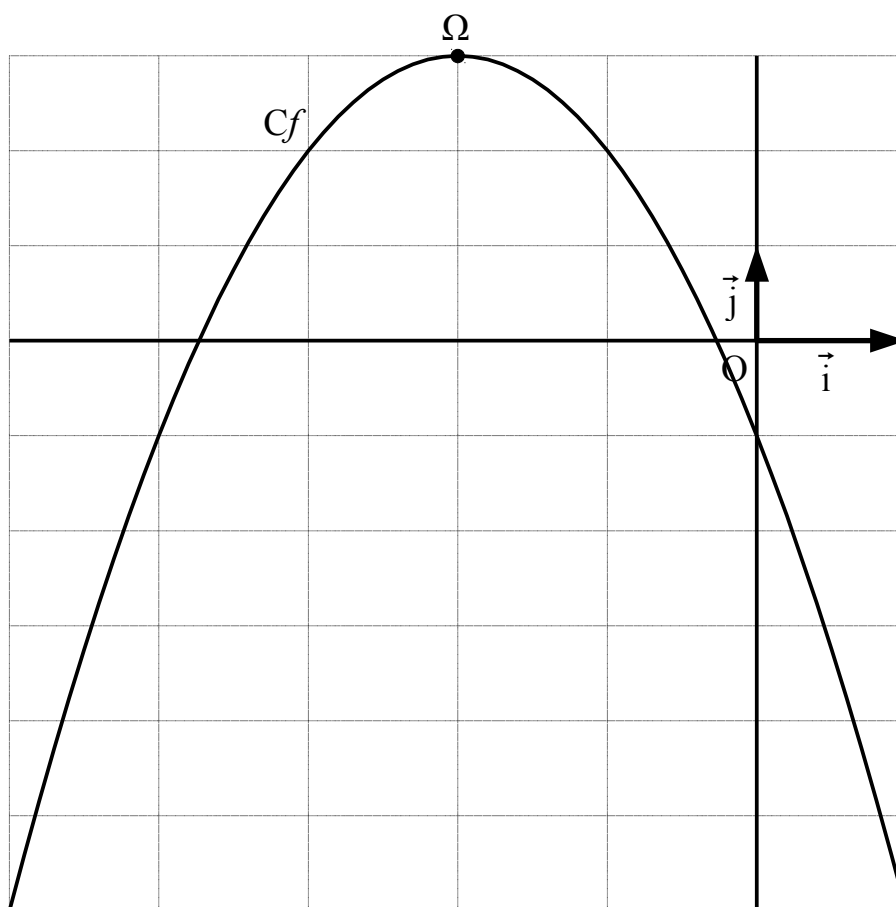
$x$	$-\infty$	$-2$	$+\infty$
$f(x)$		3	

*c) Nature de la courbe et coordonnées du sommet*

$f$  est une fonction polynôme du second degré donc  $C_f$  est une parabole. La forme canonique de  $f(x)$  est  $-(x + 2)^2 + 3$  donc  $C_f$  a pour sommet le point  $\Omega(-2 ; 3)$ .

*d) Tableau de valeurs et courbe*

$x$	-5	-4	-3	-2,5	-2	-1,5	-1	0	1
$f(x)$	-6	-1	2	2,75	3	2,75	2	-1	-6



p108: 2, 4  
p110: 18, 24  
p111: 28  
p113: 35  
p119: 78, 79

## II) FONCTIONS HOMOGRAPHIQUES

### 1) Définition

On appelle fonction homographique toute fonction  $f$  qui peut s'écrire sous la forme  $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$  ou  $a, b, c$  et  $d$  sont des réels tels que :

- 
- 

Une telle fonction est définie sur

On admet alors que  $f(x)$  peut aussi s'écrire sous la forme :

$$f(x) = \frac{k}{x-\alpha} + \beta \text{ ou } k, \alpha \text{ et } \beta \text{ sont des réels et } k \neq 0.$$

Cette nouvelle écriture est appelée « forme réduite » de  $f(x)$ .

**Ex :** Soit  $f(x) = \frac{x-9}{4x-4}$

Pour tout  $x$  de  $\mathbb{R} - \{1\}$ ,  $f(x) =$

### 2) Représentation graphique

La mise de  $f(x)$  sous la forme réduite  $f(x) = \frac{k}{x-\alpha} + \beta$  permet de mettre

en évidence que la représentation graphique d'une fonction homographique est une hyperbole de centre de symétrie  $\Omega(\quad)$  qui admet pour asymptotes les droites d'équations

### 3) Dans les exercices

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R} - \{-2\}$  par  $x \mapsto \frac{2x+7}{3x+6}$

a) *Forme réduite de  $f(x)$*

$$\begin{aligned}\text{Pour tout } x \text{ de } \mathbb{R} - \{-2\}, \quad f(x) &= \frac{\frac{2}{3}x + \frac{7}{3}}{x+2} \\ f(x) &= \frac{\frac{2}{3}(x+2) - \frac{4}{3} + \frac{7}{3}}{x+2} \\ f(x) &= \frac{\frac{2}{3}(x+2) + 1}{x+2} \\ f(x) &= \frac{2}{3} + \frac{1}{x+2}\end{aligned}$$

b) *Variations sur  $]-\infty ; -2[$*

Pour tous  $x_1, x_2$  tels que  $x_1 < x_2 < -2$   
on a  $x_1 + 2 < x_2 + 2 < 0$

la fonction inverse est strictement décroissante sur  $\mathbb{R}^{*-}$

$$\text{donc } \frac{1}{x_1+2} > \frac{1}{x_2+2}$$

$$\text{donc } \frac{2}{3} + \frac{1}{x_1+2} > \frac{2}{3} + \frac{1}{x_2+2}$$

$$\text{donc } f(x_1) > f(x_2)$$

donc  $f$  est strictement décroissante sur  $]-\infty ; -2[$

*Variations sur  $]-2 ; +\infty[$*

Pour tous  $x_1, x_2$  tels que  $-2 < x_1 < x_2$   
on a  $0 < x_1 + 2 < x_2 + 2$

la fonction inverse est strictement décroissante sur  $\mathbb{R}^{*+}$

$$\text{donc } \frac{1}{x_1+2} > \frac{1}{x_2+2}$$

$$\text{donc } \frac{2}{3} + \frac{1}{x_1+2} > \frac{2}{3} + \frac{1}{x_2+2}$$

$$\text{donc } f(x_1) > f(x_2)$$

donc  $f$  est strictement décroissante sur  $] -2 ; +\infty[$

### Tableau de variations

$x$	$-\infty$	$-2$	$+\infty$
$f(x)$	↘		↘

### c) Nature de la courbe, coordonnées du sommet, asymptotes

$f$  est une fonction homographique donc  $C_f$  est une hyperbole.

La forme canonique de  $f(x)$  est  $\frac{2}{3} + \frac{1}{x+2}$  donc  $C_f$  a pour centre de

symétrie le point  $\Omega(-2 ; 2/3)$  et pour asymptotes les droites d'équations :  $x = -2$  et  $y = 2/3$ .

### d) Tableau de valeurs et courbe

$x$	-5	-4	-3	-2,5	-2,2	-1,8	-1,5	-1	0	1
$f(x)$	0,33	0,17	-0,33	-1,33	-4,33	5,67	2,67	1,67	1,17	1

