FONCTIONS 5 – FONCTIONS HOMOGRAPHIQUES 20.2

Ex 1 - Soit f la fonction : $x \longmapsto 4+\dfrac{x-3}{x-7}$

1) Déterminer l'ensemble de définition de f.
2) Montrer que f est une fonction homographique.
3) Écrire $f(x)$ sous forme réduite.
4) Déterminer la nature de Cf ainsi que les coordonnées de son centre de symétrie.
5) Déterminer les coordonnées des intersections de Cf avec les axes.
6) Tracer Cf ainsi que ses asymptotes.

Ex 2 - Un cycliste roule pendant 1 heure à la vitesse moyenne de 20km/h, puis il se met à rouler pendant t heures à la vitesse moyenne de 28km/h. On note $v(t)$ sa vitesse moyenne sur l'ensemble du trajet.

1) Quel est l'intervalle d'étude I de la fonction v ?
2) Exprimer en fonction de t la distance totale parcourue par le cycliste.
3) Exprimer également la durée totale du parcours et en déduire $v(t)$ en fonction de t.
4) Étudier les variations de v sur I.
5) Quelle est la nature de la courbe Cv ?
6) Écrire $v(t)$ sous forme réduite et en déduire l'équation de l'asymptote horizontale de Cv.
7) Représenter graphiquement v.

Ex 3 - f est une fonction homographique dont la représentation graphique Cf a pour centre de symétrie le point $\Omega(1\ ;\ 2)$ et passe par le point $A(0\ ;\ -1)$.

1) Déterminer la forme réduite de $f(x)$ ainsi que l'ensemble de définition de f.
2) Étudier les variations de f et faire un tableau de variations.
3) En déduire que f admet un minimum de -1 sur $\mathbb{R}^-$
4) Tracer Cf ainsi que la droite d d'équation : $y = 7 - x$.
5) Résoudre graphiquement : $f(x) = 7 - x$.
6) Déterminer les positions relatives de Cf et d.

Ex 4 - On considère la fonction f définie par : $x \longmapsto \dfrac{2x+b}{5-x}$

1) Pour quelle valeur de b appelée b_0 la fonction n'est pas homographique ?
2) On considère désormais que : $b > b_0$. Déterminer les variations de f et faire un tableau de variations.
3) Montrer que $-\dfrac{b}{2} < 5$, puis étudier le signe de f.

Ex 5 - Une calculatrice coûte 100 euros juste après une évolution de son prix de t %. On note $p(t)$ son prix initial en euros.

1) Calculer $p(5)$, le prix initial de cette calculatrice avant une augmentation de 5 euros, puis $p(-4)$ son prix initial avant une baisse de 4 euros.
2) Conjecture : A votre avis, comment évolue $p(t)$ quand t augmente ?
3) Montrer que :
   pour $t \in]-100\ ;\ +\infty[$: $p(t)=\dfrac{10000}{100+t}$
4) Étudier les variations de p sur $]-100\ ;\ +\infty[$ puis vérifier votre conjecture.
5) Tracer Cf.

Ex 6 - f est définie sur $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$ par $f(x)=\dfrac{3x+5}{x+1}$

1) Montrer que pour tout réel x différent de -1, $g(x)-2=\dfrac{x+3}{x+1}$. En déduire l'antécédent de 2.
2) Montrer que 3 n'a pas d'antécédent par f.

Ex 7 - Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $x \longmapsto \dfrac{ax+b}{x}$ et telle que Cf passe par les points $A(1\ ;\ 2)$ et $B(-1\ ;\ -4)$

1) Déterminer a et b.
2) Mettre $f(x)$ sous forme réduite.
3) Déterminer les variations de f et faire un tableau de variations.
4) Quelle est la nature de Cf ? Quelles sont les coordonnées de son centre de symétrie ?
5) Tracer Cf ainsi que ses asymptotes.
6) Déterminer les coordonnées des intersections de Cf avec les axes.

Ex 8 - On veut construire une piscine rectangulaire de 50m² bordée tout autour par une margelle de 2m de large. Pour cela on réserve dans le jardin un emplacement (piscine + margelle) de largeur x et de longueur y.

1) On choisira dans la suite : $x \in]4\ ;\ 9]$. Pourquoi ?
2) On pose $f(x) = y$. Exprimer $f(x)$ en fonction de x.
3) Étudier les variations de f sur l'intervalle $]4\ ;\ 9]$.
4) Représenter graphiquement f.
5) On souhaite maintenant que la largeur de l'emplacement soit comprise entre 7 et 9 mètres. Donner un encadrement de la longueur de l'emplacement.
6) On décide finalement que l'emplacement devra être deux fois plus long que large. Poser une équation et la résoudre graphiquement puis algébriquement.