FONCTIONS 5 – POLYNÔMES DE DEGRÉ 2

Ex 1 - Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$x \longmapsto 2x^2 - 16x + 24$

1) Écrire $f(x)$ sous forme canonique, puis factoriser.
2) Étudier les variations de f puis faire un tableau de variations.
3) Représenter graphiquement f.

Dans les questions suivantes, on choisira la forme la plus adaptée de $f(x)$:

4) Calculer les images de 4, 0 et 6.
5) Déterminer le ou les antécédents de 0 par f.
6) Résoudre l'équation $f(x) = 24$.
7) Montrer que pour tout réel x, on a $f(x) \geqslant -8$.

Ex 2 - Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$x \longmapsto 2x^2 + 3x + 5$

1) Mettre $f(x)$ sous forme canonique.
2) Déterminer les variations de f et faire un tableau de variations.
3) Quelle est la nature de Cf ? Quelles sont les coordonnées de son sommet ?
4) Tracer Cf ainsi que la parabole P d'équation $y=x^2$
5) Déterminer la position relative des deux courbes.

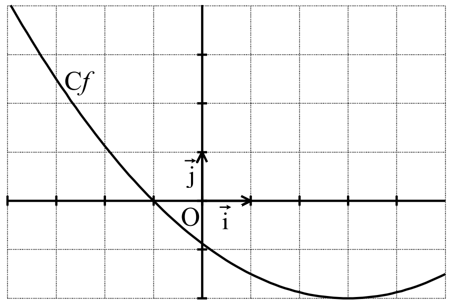
Ex 3 - Soit ABCD un carré de côté 10cm.
M et N appartiennent respectivement aux côtés [AB] et [AD], et sont tels que AM = DN.
P est tel que AMPN soit un rectangle.
On pose AM = x et on note $f(x)$ l'aire de AMPN.

1) A quel intervalle appartient x ?
2) Exprimer $f(x)$ en fonction de x.
3) Montrer que f admet un extremum que l'on caractérisera.
4) Déterminer la nature de Cf ainsi que les coordonnées de son sommet.
5) Quelle est la plus grande aire possible pour le rectangle AMPN ? Justifier.

Ex 4 - Soit C la courbe d'équation $y=\sqrt{x}$, M un point de C, H son projeté orthogonal sur l'axe des abscisses et A le point de coordonnées (2 ; 0).
On cherche à déterminer la position de M pour laquelle la distance AM est la plus petite possible.
On pose $x_M = x$ et $f(x) = AM^2$.

1) Faire une figure en choisissant un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ d'unité 4cm et placer approximativement M.
2) Montrer que pour $x \in [0 ; 2]$: $f(x) = x^2 - 3x + 4$
3) Écrire $f(x)$ sous forme canonique et montrer que f admet un minimum que l'on précisera.
4) Justifier rapidement pourquoi minimiser AM^2 permet de minimiser aussi AM. En déduire la valeur minimum de AM et la position de M associée.

Ex 5 - Soit f la fonction polynôme de degré 2 représentée ci-dessous.



1) Lire les coordonnées du sommet de la parabole puis celles du point d'intersection de Cf avec l'axe des abscisses.
En déduire la forme canonique de $f(x)$.
2) Déterminer les coordonnées de l'autre point d'intersection avec l'axe des abscisses.
3) Justifier que pour tout réel x, $f(x) \geqslant -2$

Ex 6 - Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par : $x \longmapsto -x^2 + 2x - 3$

1) Étudier le signe de $f(x)$ puis interpréter graphiquement.
2) Déterminer la position relative de Cf avec la droite d : $y = -x - 1$.

Ex 7 - Soit f une fonction polynôme du second degré de forme canonique : $f(x) = a(x - \alpha)^2 + \beta$
où a est strictement positif.

1) Sans utiliser les résultats du cours sur les fonctions polynômes, montrer que f admet un extremum que l'on précisera.
2) Déterminer de même les variations de f.

Ex 8 - Soit P la parabole d'équation $y = x^2$
et d la droite d'équation $y = 2ax - 1$.
On cherche à quelles conditions sur le réel a, la parabole et la droite se coupent et combien elles ont de points d'intersection.

1) Montrer que le problème revient à étudier l'équation $(x - a)^2 = a^2 - 1$.
2) Si $a^2 - 1 > 0$, l'équation admet combien de solutions ? (On ne cherchera pas ces solutions !)
A quelles valeurs de a ce cas correspond-il ?
3) Si $a = 1$ ou $a = -1$:
Combien y a-t-il d'intersections ? Quelles sont leurs coordonnées ? Faire une figure pour $a = 1$.
4) Quels sont les cas restants ? Combien y a-t-il alors d'intersections ?

Ex 9 - On lance une balle en l'air. La hauteur h de la balle en m au bout de t secondes est $h = 20t - 5t^2$

1) Au bout de combien de secondes la balle retouche-t-elle le sol ?
2) Quelle est la hauteur maximum atteinte ?