

INÉQUATIONS

I) TABLEAU DE SIGNE

1) Exemple : signe de $-2x + 3$

$$-2x + 3 \geq 0 \Leftrightarrow -2x \geq -3 \Leftrightarrow x \leq \frac{3}{2}$$

$$(-2x + 3 < 0 \Leftrightarrow -2x < -3 \Leftrightarrow x > \frac{3}{2})$$

Récapitulons ces résultats dans un "tableau de signe" :

x	$-\infty$	$3/2$	$+\infty$
$-2x+3$	+	0	-

2) Cas général : Signe d'une expression du 1^{er} degré

Propriété :

Dans un tableau de signe :

$-\frac{b}{a}$ est la valeur de x qui « annule » l'expression $ax + b$.

A droite de cette valeur, $ax + b$ est du signe de a .

A gauche, $ax + b$ est du signe contraire.

Démonstration :

$$\text{Soit (I) : } x > -\frac{b}{a} \quad (a \neq 0)$$

$$(I) \Leftrightarrow a^2 x > -ba \quad \text{et } a \neq 0$$

$$(I) \Leftrightarrow a^2 x + ba > 0 \quad \text{et } a \neq 0$$

$$(I) \Leftrightarrow a(ax + b) > 0 \quad \text{et } a \neq 0$$

$$(I) \Leftrightarrow a \text{ et } (ax + b) \text{ sont du même signe et } a \neq 0$$

$$\text{Bilan, pour } a \neq 0 \text{ on a : } x > -\frac{b}{a} \Leftrightarrow ax + b \text{ est du signe de } a$$

3) Signe d'un produit ou d'un quotient

Ex : Étudier le signe de $A(x) = \frac{x+1}{x-1}$ en fonction de x .

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$x+1$	-	0	+	+
$x-1$	-		0	+
$A(x)$	+	0	-	+

Bilan : $A(x) > 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty ; -1[\cup]1 ; +\infty[$
 $A(x) < 0 \Leftrightarrow x \in]-1 ; 1[$
 $A(x) = 0 \Leftrightarrow x = -1$

p74 : 70, 72, 75
p83 : 184

II) ÉQUIVALENCES

Pour être certain de résoudre les inéquations par équivalences successives, nous nous appuierons sur les propriétés suivantes :

A, B, C étant des réels quelconques, on a :

1) $A > B \Leftrightarrow A + C > B + C$

2) $A > B \Leftrightarrow A - C > B - C$

3) **Si $C > 0$ alors :** $A > B \Leftrightarrow AC > BC$

Si $C < 0$ alors : $A > B \Leftrightarrow AC < BC$

4) **Si $C > 0$ alors :** $A > B \Leftrightarrow \frac{A}{C} > \frac{B}{C}$

Si $C < 0$ alors : $A > B \Leftrightarrow \frac{A}{C} < \frac{B}{C}$

Remarque :

Il n'y a pas de propriété simple pour les inéquations produit ou quotient...
Mais peu importe puisque nous avons les tableaux de signe !

Ex: Résoudre dans \mathbb{R} , (I) : $\frac{4}{x} \geq 1$

Condition : $x \neq 0$

Méthode fautive :

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} 4 \geq x \\ x \neq 0 \end{cases}$$

$$S =]-\infty ; 0[\cup]0 ; 4]$$

Équivalence fautive :
On a multiplié les 2 membres de (I) par x qui peut changer de signe !

Méthode juste :

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{4}{x} - 1 \geq 0 \\ x \neq 0 \end{cases} \quad \text{cf 2)}$$

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{4-x}{x} \geq 0 \\ x \neq 0 \end{cases}$$

x	$-\infty$	0	4	$+\infty$
$4-x$	+		0	-
x	-	0	+	+
Q	-		+	-

$$S =]0 ; 4]$$

Logique :

p78 : 149, 150

p79 : 151

Inéquations :

p78 : 123, 124, 126, 130, 132, 133, 137, 138 \rightarrow 147

Fonctions :

p79 : 154, 155, 157, 159, 160

III) DANS LES EXERCICES

Ex : Résoudre dans \mathbb{R} : (I) $\frac{4(x+1)}{x+3} \geq x+1$

Conditions :

$$x+3 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -3$$

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{4(x+1)}{x+3} - x + 1 \geq 0 \\ x \neq -3 \end{cases}$$

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{4(x+1) - (x+1)(x+3)}{x+3} \geq 0 \\ x \neq -3 \end{cases}$$

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{(x+1)(4-x-3)}{x+3} \geq 0 \\ x \neq -3 \end{cases}$$

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{(x+1)(1-x)}{x+3} \geq 0 \\ x \neq -3 \end{cases}$$

S'il y a des conditions, les préciser

A chaque étape, penser à écrire l'équivalence et les conditions

Factoriser en un produit ou quotient positif ou négatif, puis faire un tableau de signe

x	$-\infty$	-3	-1	1	$+\infty$		
$x+1$	-	-	0	+	+		
$1-x$	+	+	+	0	-		
$x+3$	-	0	+	+	+		
Q	+		-	0	+	0	-

$$S =]-\infty ; -3[\cup [-1 ; 1]$$