Composition du 9 III 20 — 2h — Corrigé succinct

I) Résoudre (I_1) : $\dfrac{3+4x}{-x+4} \leqslant 2$

condition : $x \neq 4$

$(I_1) \Leftrightarrow \dfrac{3+4x}{-x+4} - \dfrac{2(-x+4)}{-x+4} \leqslant 0$ et $x \neq 4$

$(I_1) \Leftrightarrow \dfrac{3+4x+2x-8}{-x+4} \leqslant 0$ et $x \neq 4$

$(I_1) \Leftrightarrow \dfrac{6x-5}{-x+4} \leqslant 0$ et $x \neq 4$

x	$-\infty$		$\frac{5}{6}$		4		$+\infty$
$6x-5$		$-$	0	$+$		$+$	
$-x+4$		$+$		$+$	0	$-$	
Q		$-$	0	$+$	‖	$-$	

$\boxed{S = \left]-\infty ; \frac{5}{6}\right] \cup \left]4 ; +\infty\right[}$

II) 1) R(x)

Une tonne est vendue 350 milliers d'euros

donc $\boxed{\text{pour tout } x \text{ de } [0 ; 200],\ R(x) = 350x}$

2) ⓐ B(x)

le bénéfice est la recette moins le coût de production

donc pour tout x de $[0 ; 200]$, $B(x) = R(x) - C(x)$

donc $B(x) = 350x - \frac{1}{30}x^3 + 6{,}1x^2 - 367{,}4x - 108$

$$\boxed{B(x) = -\frac{1}{30}x^3 + 6{,}1x^2 - 17{,}4x - 108}$$

ⓑ Factorisation B(x)

Pour tout x de $[0 ; 200]$, on pose $A = -\frac{1}{30}(x-180)(x-6)(x+3)$

$A = -\frac{1}{30}(x-180)(x^2-3x-18)$

$A = -\frac{1}{30}(x^3 - 183x^2 + 522x + 3240)$

$A = -\frac{1}{30}x^3 + 6{,}1x^2 - 17{,}4x - 108 = B(x)$

Bilan, B(x) est bien égal à $\boxed{-\frac{1}{30}(x-180)(x-6)(x+3)}$

ⓒ Bénéfice positif

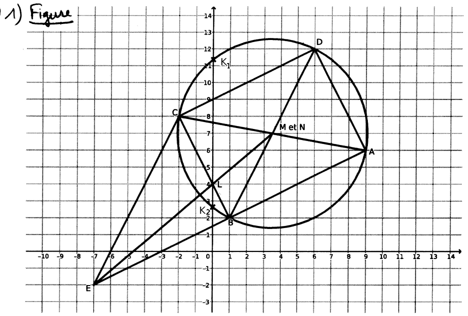
$B(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{30}(x-180)(x-6)(x+3) \geqslant 0$ et $x \in [0 ; 200]$

$\Leftrightarrow (x-180)(x-6)(x+3) \leqslant 0$ et $x \in [0 ; 200]$

x	0		6		180		200
$x-180$		$-$		$-$	0	$+$	
$x-6$		$-$	0	$+$		$+$	
$x+3$		$+$		$+$		$+$	
P		$+$	0	$-$	0	$+$	

Bilan : le bénéfice est positif lorsque la production est comprise $\boxed{\text{entre 6 et 180 tonnes}}$

III) 1) Figure



2) Nature de ABC

le repère est orthonormé donc :

$AB^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 = (1-9)^2 + (2-6)^2 = 80$

$BC^2 = (x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2 = (-2-1)^2 + (8-2)^2 = 45$

$AC^2 = (x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2 = (-2-9)^2 + (8-6)^2 = 125$

On a donc $AC^2 = AB^2 + BC^2$

donc d'après la réciproque du théorème de Pythagore dans ABC,

$\boxed{\text{le triangle ABC est rectangle en B}}$

(Remarque $AB^2 \neq BC^2$ donc le triangle n'est pas isocèle)

3) ⓐ Coordonnées de M et N

Par Ⓗ M est le milieu de [AC] donc $x_M = \frac{x_A + x_C}{2} = \frac{9-2}{2} = \frac{7}{2}$

et $y_M = \frac{y_A + y_C}{2} = \frac{6+8}{2} = 7$ $\boxed{M\left(\frac{7}{2} ; 7\right)}$

Par Ⓗ N est le milieu de [BD] donc $x_N = \frac{x_B + x_D}{2} = \frac{1+6}{2} = \frac{7}{2}$

et $y_N = \frac{y_B + y_D}{2} = \frac{2+12}{2} = 7$ $\boxed{N\left(\frac{7}{2} ; 7\right)}$

ⓑ Nature de ABCD

D'après 3)ⓐ M et N sont confondus

donc le quadrilatère ABCD a ses diagonales [AC] et [BD] qui se coupent en leur milieu

donc ABCD est un parallélogramme.

de plus d'après 2) l'angle $\widehat{ABC}$ est droit

or un parallélogramme qui a un angle droit est un rectangle

donc $\boxed{\text{ABCD est un rectangle}}$

(Remarque $AB^2 \neq BC^2$ donc ABCD n'est pas un carré)

4) ⓐ Coordonnées de E

Par Ⓗ, BDCE est un parallélogramme

donc $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{DC}$ donc $\begin{cases} x_E - x_B = x_C - x_D \\ y_E - y_B = y_C - y_D \end{cases}$

donc $\begin{cases} x_E - 1 = -2 - 6 \\ y_E - 2 = 8 - 12 \end{cases}$

donc $\begin{cases} x_E = -7 \\ y_E = -2 \end{cases}$ $\boxed{E(-7 ; -2)}$

ⓑ milieu de [AE]

le milieu de [AE] a pour coordonnées $x = \frac{x_A + x_E}{2} = \frac{9-7}{2} = 1$

et $y = \frac{y_A + y_E}{2} = \frac{6-2}{2} = 2$

On reconnait les coordonnées de B

donc $\boxed{\text{B est bien le milieu de [AE]}}$

ⓒ Coordonnées de L

Par Ⓗ $\overrightarrow{CL} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CB}$ donc $\begin{cases} x_L - x_C = \frac{2}{3}(x_B - x_C) \\ y_L - y_C = \frac{2}{3}(y_B - y_C) \end{cases}$

donc $\begin{cases} x_L + 2 = \frac{2}{3}(1+2) \\ y_L - 8 = \frac{2}{3}(2-8) \end{cases}$

donc $\begin{cases} x_L = 0 \\ y_L = 4 \end{cases}$ donc $\boxed{L(0 ; 4)}$

ⓓ Que représente L ?

Par Ⓗ, $\overrightarrow{CL} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CB}$ et d'après ⓑ B est le milieu de [AE]

donc $\boxed{\text{L est le centre de gravité du triangle ACE}}$

ⓔ E, L et M alignés ?

D'après ⓓ L est le centre de gravité du triangle ACE

Par Ⓗ M est le milieu de [AC] donc (EM) est une médiane de ACE

donc L appartient à (EM)

donc $\boxed{\text{E, L et M sont alignés}}$

5) ⓐ Cercle circonscrit à ABC

D'après 2) ABC est un triangle rectangle en B

donc le cercle circonscrit à ABC a pour diamètre l'hypoténuse [AC]

et pour centre le milieu de [AC] qui est par Ⓗ le point M.

D'après 2) $AC^2 = 125$

donc $AC = \sqrt{125} = 5\sqrt{5}$ (AC est une longueur positive donc $AC \neq -\sqrt{125}$)

$\boxed{\text{Bilan, le cercle circonscrit à ABC est le cercle de centre M et de rayon } \frac{5\sqrt{5}}{2}}$

ⓑ Intersections de Γ avec (Oy)

$K(x ; y) \in \Gamma \cap (Oy) \Leftrightarrow \begin{cases} K(x ; y) \in \Gamma \\ K(x ; y) \in (Oy) \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} MK^2 = \frac{125}{4} \\ x = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} (x - x_M)^2 + (y - y_M)^2 = \frac{125}{4} \\ x = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(\frac{7}{2}\right)^2 + (y-7)^2 = \frac{125}{4} \\ x = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} (y-7)^2 = \frac{76}{4} \\ x = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y - 7 = \frac{\sqrt{76}}{2} \text{ ou } x - 7 = -\frac{\sqrt{76}}{2} \\ x = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 7 + \sqrt{19} \end{cases}$ ou $\begin{cases} x = 0 \\ y = 7 - \sqrt{19} \end{cases}$

Il y a donc deux points d'intersections : $\boxed{K_1(0 ; 7+\sqrt{19}) \text{ et } K_2(0 ; 7-\sqrt{19})}$

IV)

Année	CAC 40	Taux
2016	$A\left(1 + \frac{4{,}85}{100}\right) = 4862$ donc $\boxed{A \simeq 4637}$	
2017	4862	$+4{,}85\ \%$
2018	$4862\left(1 + \frac{12{,}53}{100}\right) = B$ donc $\boxed{B \simeq 5471}$	$+12{,}53\ \%$
2019	4739	$B\left(1 + \frac{t}{100}\right) = 4739$ donc $\boxed{t \approx -13{,}38\ \%}$
2020	6044	$4739\left(1 + \frac{t'}{100}\right) = 6044$ donc $\boxed{t' \approx +27{,}54\ \%}$

V

La surface initiale est 100×80

La surface après modification des dimensions est $(100 - x)(80 + x)$

le problème revient donc à résoudre l'inéquation :

(I) : $(100 - x)(80 + x) > 100 \times 80$ avec $x \in [0 ; 80]$

$(I) \Leftrightarrow \cancel{100 \times 80} + 20x - x^2 > \cancel{100 \times 80}$ avec $x \in [0 ; 80]$

$(I) \Leftrightarrow x(20 - x) > 0$ avec $x \in [0 ; 80]$

x	0		20		80
x	0	$+$		$+$	
$20-x$		$+$	0	$-$	
P	0	$+$	0	$-$	

la surface du champ a augmenté lorsque $\boxed{x \in \left]0 ; 20\right[}$

I) 1) Résoudre (I_1) : $f(x) > h(x)$

algébriquement :

$(I_1) \Leftrightarrow x^2 > \frac{1}{2}x$

$(I_1) \Leftrightarrow x^2 - \frac{1}{2}x > 0$

$(I_1) \Leftrightarrow x(x - \frac{1}{2}) > 0$

x	$-\infty$		0		$1/2$		$+\infty$
x		$-$	0	$+$		$+$	
$x-\frac{1}{2}$		$-$		$-$	0	$+$	
P		$+$	0	$-$	0	$+$	

$\boxed{\mathcal{S} =]-\infty ; 0[\cup]\frac{1}{2} ; +\infty[}$

graphiquement :
les solutions sont les abscisses des points de $\mathcal{C}_f$ situés au dessus de $\mathcal{D}_h$

$\boxed{\mathcal{S} =]-\infty ; 0[\cup]\frac{1}{2} ; +\infty[}$

Résoudre (I_2) : $f(x) \leq g(x)$

algébriquement :

$(I_2) \Leftrightarrow x^2 \leq x^3 - 2x$

$(I_2) \Leftrightarrow x^3 - x^2 - 2x \geq 0$

$(I_2) \Leftrightarrow x(x^2 - x - 2) \geq 0$

$(I_2) \Leftrightarrow x\left[(x-\frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4} - \frac{8}{4}\right] \geq 0$

$(I_2) \Leftrightarrow \cdots$

$(I_2) \Leftrightarrow x(x-2)(x+1) \geq 0$

x	$-\infty$		-1		0		2		$+\infty$
x		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-2$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
P		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

$\boxed{\mathcal{S} = [-1 ; 0] \cup [2 ; +\infty[}$

graphiquement :
les solutions sont les abscisses des points de $\mathcal{C}_f$ situés au dessous de $\mathcal{C}_g$

$\boxed{\mathcal{S} = [-1 ; 0] \cup [2 ; +\infty[}$

Résoudre (E_1) : $g(x) = 0$

algébriquement :

$(E_1) \Leftrightarrow x^3 - 2x = 0$

$(E_1) \Leftrightarrow x(x^2 - 2) = 0$

$(E_1) \Leftrightarrow x(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2}) = 0$

$(E_1) \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = \sqrt{2}$ ou $x = -\sqrt{2}$

$\boxed{\mathcal{S} = \{-\sqrt{2} ; 0 ; \sqrt{2}\}}$

graphiquement :
les solutions sont les abscisses des points d'intersection de $\mathcal{C}_g$ avec (Ox)

$\boxed{\mathcal{S} = \{-a ; 0 ; a\} \text{ avec } a \simeq 1{,}4}$

2) Encadrer $f(x)$ pour $x \in]-2 ; 1[$

Pour tout x de $]-2 ; 1[$,

$\boxed{f(x) \in [0 ; 4[}$

II) 1) Montrer que $\overrightarrow{PM} + \overrightarrow{ON} = \vec{0}$

Par (H), Pour tout point A, on a : $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AO} - \overrightarrow{AP} = \vec{0}$

donc $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{PA} = \vec{0}$

donc $(\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{AM}) + (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AN}) = \vec{0}$

donc $\boxed{\overrightarrow{PM} + \overrightarrow{ON} = \vec{0}}$

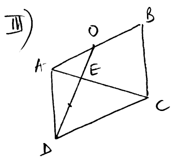
2) Nature de MONP

D'après 1) $\overrightarrow{PM} + \overrightarrow{ON} = \vec{0}$

donc $\overrightarrow{PM} = \overrightarrow{NO}$

donc $\boxed{\text{MONP est un parallélogramme}}$

III)



1) Montrer que $\overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OD}$

Par (H), ABCD est un parallélogramme

donc $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$

donc $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OD}$ (car par (H) O est le milieu de [AB] donc $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AO}$)

donc $\boxed{\overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OD}}$

2) Exprimer $\overrightarrow{AE}$ en fonction de $\overrightarrow{AO}$ et $\overrightarrow{OD}$

$\boxed{\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OE} = \overrightarrow{AO} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OD}}$ (car par (H) $\overrightarrow{OE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OD}$)

3) Montrer que A, E et C sont alignés

D'après 1) $\overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OD} = 3(\overrightarrow{AO} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OD}) = 3\overrightarrow{AE}$ (car d'après 2) $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AO} + \frac{1}{3}\overrightarrow{OD}$)

donc $\overrightarrow{AC}$ est colinéaire à $\overrightarrow{AE}$ donc $\boxed{\text{A, E et C sont alignés}}$

IV) 1) a) Factoriser $2x^2 - x - 1$

Pour tout x de $\mathbb{R}$,

$2x^2 - x - 1 = 2(x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2})$

$= 2\left[(x - \frac{1}{4})^2 - \frac{1}{16} - \frac{8}{16}\right]$

$= 2\left[(x - \frac{1}{4})^2 - (\frac{3}{4})^2\right]$

$= \cdots$

$= \boxed{(x-1)(2x+1)}$

b) Factoriser $B(x)$

Pour tout x de $\mathbb{R}$,

$B(x) = 4(1+2x) - 2x^3 - x^2$

$B(x) = 4(2x+1) - x^2(2x+1)$

$B(x) = (2x+1)(4 - x^2)$

$\boxed{B(x) = (2x+1)(2-x)(2+x)}$

c) Résoudre (I_1)

(I_1) : $A(x) < B(x)$

$(I_1) \Leftrightarrow 2(3x-2)(x-1)(2x+1) < (2x+1)(2-x)(2+x)$

$(I_1) \Leftrightarrow (2x+1)(6x-4)(x-1) - (2x+1)(2-x)(2+x) < 0$

$(I_1) \Leftrightarrow (2x+1)\left[(6x-4)(x-1) - (2-x)(2+x)\right] < 0$

$(I_1) \Leftrightarrow (2x+1)\left[6x^2 - 10x + 4 - 4 + x^2\right] < 0$

$(I_1) \Leftrightarrow (2x+1)(7x^2 - 10x) < 0$

$(I_1) \Leftrightarrow x(2x+1)(7x-10) < 0$

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		0		$\frac{10}{7}$		$+\infty$
x		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$2x+1$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$7x-10$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
P		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	

$\boxed{\mathcal{S} =]-\infty ; -\frac{1}{2}[\cup]0 ; \frac{10}{7}[}$

2) a) Développer puis factoriser $C(x)$

Pour tout x de $\mathbb{R}$,

$C(x) = -5(x-1)^2 - 10x + 25$

$C(x) = -5(x^2 - 2x + 1) - 10x + 25$

$C(x) = -5x^2 + \cancel{10x} - 5 - \cancel{10x} + 25$

$\boxed{C(x) = -5x^2 + 20}$

$C(x) = 5(-x^2 + 4)$

$\boxed{C(x) = 5(2-x)(2+x)}$

b) Résoudre (E_1)

(E_1) : $B(x) = C(x)$

$(E_1) \Leftrightarrow (2x+1)(2-x)(2+x) = 5(2-x)(2+x)$

$(E_1) \Leftrightarrow (2-x)(2+x)(2x+1-5) = 0$

$(E_1) \Leftrightarrow (2-x)(2+x)(2x-4) = 0$

$(E_1) \Leftrightarrow -2(x-2)^2(x+2) = 0$

$\boxed{\mathcal{S} = \{-2 ; 2\}}$

c) Résoudre (I_2)

(I_2) : $\dfrac{5B(x)}{C(x)} \geq \dfrac{-2x^2}{2-x}$

conditions : $\begin{cases} C(x) \neq 0 \\ 2-x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 2 \text{ et } x \neq -2 \\ x \neq 2 \end{cases}$

$(I_2) \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{\cancel{5}(2x+1)(2-x)\cancel{(2+x)}}{\cancel{5}(2-x)\cancel{(2+x)}} \geq \dfrac{-2x^2}{2-x} \\ x \neq -2 \text{ et } x \neq 2 \end{cases}$

$(I_2) \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{-2x^2 + 3x + 2}{2-x} + \dfrac{2x^2}{2-x} \geq 0 \\ x \neq -2 \text{ et } x \neq 2 \end{cases}$

$(I_2) \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{3x+2}{2-x} \geq 0 \\ x \neq -2 \text{ et } x \neq 2 \end{cases}$

x	$-\infty$		-2		$-2/3$		2		$+\infty$
$3x+2$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$2-x$		$+$		$+$		$+$	0	$-$	
P		$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	

$\boxed{\mathcal{S} = [-\frac{2}{3} ; 2[}$