Classes de 2nde	Composition n°2 de mathématiques	Jeudi 23 mars 2017
Calculatrice autorisée		Durée : 3h00

Exercice 1 :

Partie A :

f est une fonction définie sur l'intervalle $[-2\,;3]$ dont voici le tableau de variation :

x	-2	1	3
variations de f	-1 ↗	2 ↘	0

1. Pour tout nombre réel x de $[-2\,;3]$, $f(x) \geq 0$	F
2. Pour tout nombre réel x de $[-2\,;3]$, $f(x) \leq 3$	V
3. Il existe un nombre réel x de $[-2\,;3]$ tel que $f(x) < 0$	V
4. Il existe un nombre réel x de $[-2\,;3]$ tel que $f(x) = -2$	F
5. Pour tout nombre réel x de $[-2\,;3]$, il existe un nombre réel x' de $[-2\,;3]$ tel que $f(x') > f(x)$	F

Partie B :

6. Si f est croissante sur $[0\,;2]$, alors f est croissante sur $[0\,;1]$	V
7. Si f est décroissante sur $[0\,;2]$, alors $f(0{,}5) \geq f(0{,}6)$	V
8. Si $f(0) < f(1)$, alors f est croissante sur $[0\,;1]$	F
9. Si f admet un maximum en 1 sur $[0; 1]$, alors f est croissante sur $[0; 1]$	F
10. Si f n'est pas croissante sur $[0; 1]$, alors f est décroissante sur $[0; 1]$	F

Exercice 2 (9 points) : On considère les fonctions $f : x \mapsto -x^2 + 6x - 5$ et $g : x \mapsto -1 + \frac{4}{x-1}$.

1. Ensembles de définition D_f et D_g :

Pas de valeur interdite pour $f(x)$ donc $D_f = \mathbb{R}$

$D_g = \{x \in \mathbb{R} \ / \ x - 1 \neq 0\} = \mathbb{R} - \{1\}$

2. Montrer que f atteint un maximum de 4 sur $\mathbb{R}$.

Pour tout x de $\mathbb{R}$, déterminons le signe de $f(x) - f(3)$:

$f(x) - f(3) = -x^2 + 6x - 5 - (-3^2 + 6 \times 3 - 5) = -x^2 + 6x - 9 = -(x-3)^2$.

Un carré étant toujours positif ou nul : $f(x) - f(3) \leq 0$ donc $f(x) \leq f(3)$ avec $f(3) = 4$

Donc <u>f admet un maximum de 4 atteint en 3 sur</u> $\mathbb{R}$

3. a.

Variations de f sur $]-\infty; 3]$.

Soit a et b deux réels tels que $a < b \leq 3$. Etudions le signe de $f(a) - f(b)$:

$f(a) - f(b) = -a^2 + 6a - 5 + b^2 - 6b + 5 = (a+b)(b-a) - 6(b-a) = (b-a)(a+b-6)$

Par hypothèse : $a < b \Rightarrow b - a > 0$

$a < 3$ et $b \leq 3 \Rightarrow a + b < 6 \Rightarrow a + b - 6 < 0$

donc $f(a) - f(b) < 0$ donc $f(a) < f(b)$ donc <u>f est strictement croissante sur $]-\infty, 3]$</u>

Variations de f sur $[3; +\infty[$.

Pour tous réels a et b tels que $3 \leq a < b$, étudions le signe de $f(a) - f(b)$:

$f(a) - f(b) = (b-a)(a+b-6)$

Par hypothèse : $a < b \Rightarrow b - a > 0$

$a \geq 3$ et $b > 3 \Rightarrow a + b > 6 \Rightarrow a + b - 6 > 0$

donc $f(a) - f(b) > 0$ donc $f(a) > f(b)$ donc <u>f est strictement décroissante sur $[3, +\infty[$</u>

b. Tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$		3		$+\infty$
f		$\nearrow$	4	$\searrow$	

4. Vérifier que, pour tout x de $\mathbb{R}$, $f(x) = -(x-5)(x-1)$.

Pour tout x de $\mathbb{R}$, développons l'expression : $-(x-5)(x-1) = -x^2 + 6x - 5 = f(x)$

5. Signe de $f(x)$.

x	$-\infty$		1		5		$+\infty$
$x-5$		$-$		$-$	0	$+$	
$x-1$		$-$	0	$+$		$+$	
-1		$-$		$-$		$-$	
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	

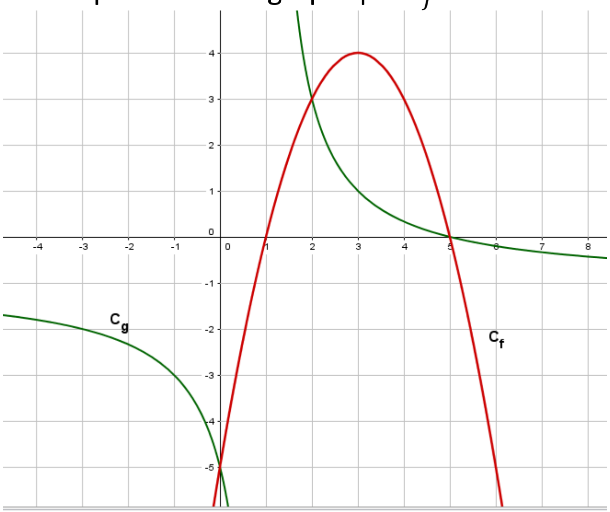
Bilan :

$f(x)$ est strictement positif sur $]1\,;5[$ et C_f est au-dessus de l'axe des abscisses

$f(x)$ est strictement négatif sur $]-\infty; 1[$ et sur $]5; +\infty[$ et C_f est en-dessous de l'axe des abscisses

$f(x)$ est nul en $x = 1$ et $x = 5$ et C_f croise l'axe des abscisses

6. Représentation graphique C_f



7. a. Variations de g sur $]-\infty; 1[$.

Pour tous réels a et b tels que $a < b < 1$, étudions le signe de $g(a) - g(b)$:

$$g(a) - g(b) = -1 + \frac{4}{a-1} + 1 - \frac{4}{b-1} = \frac{4(b-1) - 4(a-1)}{(a-1)(b-1)} = \frac{4(b-a)}{(a-1)(b-1)}$$

Par hypothèses :

$a < b \Rightarrow b - a > 0$

$a < 1 \Rightarrow a - 1 < 0$ et $b < 1 \Rightarrow b - 1 < 0$

Bilan : $g(a) - g(b) > 0$ donc $g(a) > g(b)$ donc <u>g est strictement décroissante sur $]-\infty; 1[$</u>

b. Tableau de variations de g sur D_g.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
g		$\searrow$	$\Vert$	$\searrow$	

8. Résoudre par le calcul : (E) : $f(x) = g(x)$.

$(\mathrm{E}) \Leftrightarrow -(x-5)(x-1) = -1 + \dfrac{4}{x-1}$ et $x \neq 1$

$(\mathrm{E}) \Leftrightarrow -(x-5)(x-1) = \dfrac{-x+5}{x-1}$ et $x \neq 1$

$(\mathrm{E}) \Leftrightarrow \dfrac{-(x-5)(x-1)^2 + (x-5)}{x-1} = 0$ et $x \neq 1$

$(\mathrm{E}) \Leftrightarrow -(x-5)(x-1)^2 + (x-5) = 0$ et $x \neq 1$

$(\mathrm{E}) \Leftrightarrow (x-5)[-(x-1)^2 + 1] = 0$ et $x \neq 1$

$(\mathrm{E}) \Leftrightarrow (x-5)[x(2-x)] = 0$ et $x \neq 1$

$(\mathrm{E}) \Leftrightarrow x(x-5)(2-x) = 0$ et $x \neq 1$

$(\mathrm{E}) \Leftrightarrow x = 5$ ou $x = 0$ ou $x = 2$

$S = \{0\,;\,2\,;\,5\}$

Graphiquement cela signifie que les courbes représentatives de *f* et *g* ont 3 points d'intersections ayant pour abscisses respectives, 0, 2 et 5.

9. Résoudre par le calcul $f(x) \geq g(x)$ sur D_g.

$f(x) \geq g(x) \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow \dfrac{x(x-5)(2-x)}{x-1} \geq 0$ et $x \neq 1$

x	$-\infty$		0		1		2		5		$+\infty$
x		–	0	+	|	+	|	+	|	+	
$x-5$		–	|	–	|	–	|	–	0	+	
$x-1$		–	|	–	0	+	|	+	|	+	
$2-x$		+	|	+	|	+	0	–	|	–	
$\frac{x(x-5)(-x+2)}{x-1}$		–	0	+	||	–	0	+	0	–	

$S = [0; 1[\, \cup\, [2; 5]$.

Graphiquement cela signifie que la courbe représentatives de *f* se situe au-dessus de celle de *g* sur les intervalles [0 ; 1[et [2 ; 5]

Exercice 3 (2,5 points) :

1. Traduire à l'aide des notations d'ensemble et de logique chacun des évènements suivants :

$$C = A \cap B \qquad D = \overline{A} \qquad E = \overline{A} \cap \overline{B} = \overline{A \cup B}$$

2. a. Définir l'événement $A \cap \bar{B}$ par une phrase : <u>« la souris ne présente que la maladie A »</u>

b. L'événement « La souris présente la maladie A mais pas la maladie B » est-il inclus dans $\bar{B}$? <u>Oui</u>

3. La probabilité qu'une souris n'ait pas la maladie A est 0,7, donc $P(\overline{A}) = 0{,}7$ et $P(\mathrm{A}) = 1 - P(\overline{A}) = 0{,}3$

La probabilité qu'une souris ait la maladie A ou la maladie B est 0,7 donc $P(A \cup B) = 0{,}7$

La probabilité qu'une souris ait la maladie A et la maladie B est 0,2 donc $P(A \cap B) = 0{,}2$

Or $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

donc $0{,}7 = 0{,}3 + P(B) - 0{,}2$

donc $P(B) = 0{,}6$ donc $P(\overline{B}) = 1 - P(\mathrm{B}) = 0{,}4$

Exercice 4 (2 points) :

1. Que représentent les variables F et S dans cet algorithme ?

F représente la valeur obtenue lors du dernier lancé de dé

et S représente la somme des lancés de dés.

2. Déterminer un univers de l'expérience

$\Omega = \{(1;1;1); (1;1;2); (1;1;3); (1;1;4); (1;1;5); (1;1;6); (1;2;1); (1;2;2); \ldots (6;6;4); (6;6;5); (6;6;6)\}$

Les issues sont équiprobables et il y en a $6 \times 6 \times 6 = 216$

Calculer p(A) :
L'événement A correspond à une seule issue : (1 ;1 ;1) et il y a équiprobabilité donc :

$$P(\mathrm{A}) = \frac{\text{nombre d'issues de A}}{\text{nombre total d'issues}} = \frac{1}{216}$$

Exercice 5 (4 points) :

1. Justifier que $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ est un repère du plan.

ABC étant un triangle non aplati, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires.
Ils forment donc bien avec le point A un repère du plan.

2. a. Coordonnées des points A, B, C et I dans ce repère.

A étant l'origine du repère, $A(0,0)$.
$\overrightarrow{AB} = 1\,\overrightarrow{AB} + 0\,\overrightarrow{AC}$ d'où $B(1,0)$
$\overrightarrow{AC} = 0\,\overrightarrow{AB} + 1\,\overrightarrow{AC}$ d'où $C(0,1)$
I est le milieu de $[BC]$ donc $x_I = \frac{x_B+x_C}{2} = \frac{1}{2}$ et $y_I = \frac{y_B+y_C}{2} = \frac{1}{2}$ d'où $B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

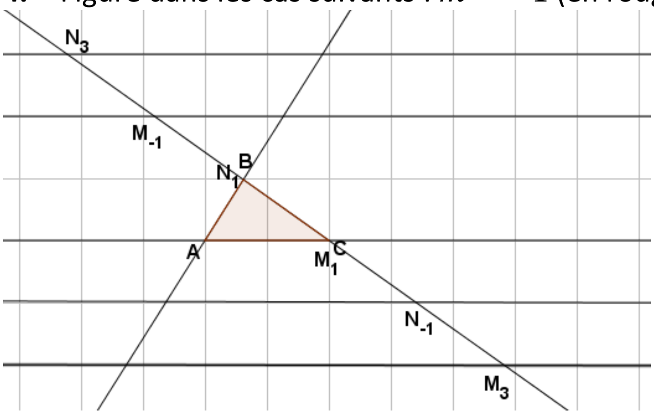
b. Coordonnées des points M et N en fonction de m, pour $m \in \mathbb{R}$.

Par hypothèses, $\overrightarrow{AM} = (1-m)\overrightarrow{AB} + m\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AN} = m\overrightarrow{AB} + (1-m)\overrightarrow{AC}$
donc : $M(1-m, m)$ et $N(m, 1-m)$

3. Si $m = 1$, où sont les points M et N ?

Si $m = 1$, $M(0,1)$ donc M est confondu avec C et N$(1,0)$ donc N est confondu avec B.

4. Figure dans les cas suivants : $m = -1$ (en rouge) puis $m = 3$ (en vert).



5. Montrer que, pour tout m de $\mathbb{R}$, $\overrightarrow{BM}$ est colinéaire à $\overrightarrow{BC}$. Que peut-on en déduire ?

Pour tout m de $\mathbb{R}$, on a par hypothèses : $\overrightarrow{AM} = (1-m)\overrightarrow{AB} + m\overrightarrow{AC}$
donc : $\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AM} = -\overrightarrow{AB} + (1-m)\overrightarrow{AB} + m\overrightarrow{AC} = -m\overrightarrow{AB} + m\overrightarrow{AC} = m(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}) = m\overrightarrow{BC}$
donc $\overrightarrow{BM}$ est toujours colinéaire à $\overrightarrow{BC}$.
On en déduit que M est toujours aligné avec B et C.

6. Déterminer les valeurs de m pour lesquelles M et N sont confondus.

D'après 2)b, on a : $M(1-m, m)$ et $N(m, 1-m)$
donc : M et N confondus $\Leftrightarrow x_M = x_N$ et $y_M = y_N \Leftrightarrow 1 - m = m \Leftrightarrow 1 = 2m \Leftrightarrow m = \frac{1}{2}$

7. Montrer que, pour tout m de $\mathbb{R}$, I est le milieu de [MN].

Calculons les coordonnées du milieu Ω de [MN] : $x_\Omega = \frac{x_M+x_N}{2} = \frac{1-m+m}{2} = \frac{1}{2}$ $\quad y_\Omega = \frac{y_M+y_N}{2} = \frac{m+1-m}{2} = \frac{1}{2}$
Ω et I ayant les mêmes coordonnées, I est bien le milieu de [MN].