204 DS du 11I20 2^h Corrigé succinct

I) 1) Ensembles de solutions

(E_1) : $\mathcal{S} = \{-2\,;0\,;1\}$

(E_2) : $\mathcal{S} = \{1\}$

(I_1) : $\mathcal{S} =]-\infty\,;-2[\,\cup\,]1\,;+\infty[$

(I_2) : $\mathcal{S} = [-2\,;1{,}4]$

2) Vrai ou faux

$h(x)=0$ a toujours 2 solutions : Faux

le point $(3a\,;4(1+a^2)) \in C_h$: Vrai

II) 1) Simplifier A

$A = \frac{5}{\sqrt{7}-\sqrt{2}} - \sqrt{7} = \frac{5(\sqrt{7}+\sqrt{2})}{7-2} - \sqrt{7} = \sqrt{7}+\sqrt{2}-\sqrt{7} = \boxed{\sqrt{2}}$

2) Simplifier B

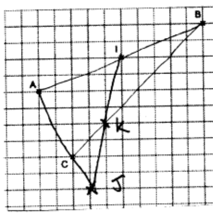
$B = \left(\sqrt{\frac{5}{3}} - \sqrt{\frac{3}{5}}\right)^2 = \frac{5}{3} - 2\sqrt{\frac{5}{3}}\sqrt{\frac{3}{5}} + \frac{3}{5} = \frac{25}{15} - \frac{30}{15} + \frac{9}{15} = \boxed{\frac{4}{15}}$

3) Le triangle EFG est rectangle ?

On a : $EG^2 + FG^2 = \frac{26}{15} + B = \frac{26}{15} + \frac{4}{15} = 2 = A^2 = EF^2$

donc d'après la réciproque de Pythagore dans le triangle EFG, ce dernier est rectangle en G.

III) 1)



2) $\vec{IJ}$ en fonction de $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$

$\vec{IJ} = \vec{IA} + \vec{AJ}$

$\vec{IJ} = \frac{1}{2}\vec{BA} + \frac{3}{2}\vec{AC}$ (Par (H) I est le milieu de [AB] et $\vec{AJ} = \frac{3}{2}\vec{AC}$)

$\boxed{\vec{IJ} = -\frac{1}{2}\vec{AB} + \frac{3}{2}\vec{AC}}$

3) $\vec{IK}$ en fonction de $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$

$\vec{IK} = \vec{IB} + \vec{BK}$

$\vec{IK} = \frac{1}{2}\vec{AB} + \frac{3}{4}\vec{BC}$ (par (H) I est le milieu de [AB] et $\vec{BK} = \frac{3}{4}\vec{BC}$)

$\vec{IK} = \frac{1}{2}\vec{AB} + \frac{3}{4}\vec{BA} + \frac{3}{4}\vec{AC}$

$\boxed{\vec{IK} = -\frac{1}{4}\vec{AB} + \frac{3}{4}\vec{AC}}$

4) Montrer que $\vec{IJ} = 2\vec{IK}$

D'après 2) et 3) $\vec{IK} = -\frac{1}{4}\vec{AB} + \frac{3}{4}\vec{AC}$

donc $\boxed{2\vec{IK} = -\frac{1}{2}\vec{AB} + \frac{3}{2}\vec{AC} = \vec{IJ}}$

5) Qu'en déduire pour K ?

D'après 4) $\vec{IJ} = 2\vec{IK}$ donc $\boxed{\text{K est le milieu de [IJ]}}$

IV) 1) D_f

$\boxed{D_f = [0\,;4]}$

2) AM et MN en fonction de x

Pour tout x de D_f :

Par (H) $M \in [AB]$ donc $AM + MB = AB$ donc $\boxed{AM = 4 - x}$

Par (H) B, M et A alignés ainsi que B, N et C donc d'après Thalès dans les triangles BMN et BAC,

on a : $\frac{MN}{AC} = \frac{BM}{BA}$ donc $\frac{MN}{4} = \frac{x}{4}$ donc $\boxed{MN = x}$

3) Déterminer f(x)

Pour tout x de D_f :

Par (H) $(AM) \perp (AC)$ donc AM est une hauteur du trapèze AMNI de bases [MN] et [AI]

donc $\boxed{f(x) = \frac{(MN + AI) \times AM}{2} = \frac{(x+2)(4-x)}{2}}$

4) Résoudre graphiquement $f(x) = 3$

On trace $\mathcal{C}_f$ sur la calculatrice

les solutions sont les abscisses des points d'intersection de $\mathcal{C}_f$ avec la droite d'équation $y = 3$

$\boxed{\mathcal{S} = \{a\} \text{ avec } a \approx 2{,}732}$

5) (a) Vérification d'égalité

Pour tout x de D_f :

$\boxed{-\frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{9}{2}} = \frac{3^2 - (x-1)^2}{2} = \frac{(3-x+1)(3+x-1)}{2}$

$= \frac{(4-x)(2+x)}{2} = \boxed{f(x)}$

(b) Résoudre E : $f(x) = 3$

(E) $\iff -\frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{9}{2} = 3$ et $x \in [0\,;4]$

(E) $\iff -(x-1)^2 + 9 = 6$ et $x \in [0\,;4]$

(E) $\iff (x-1)^2 = 3$ et $x \in [0\,;4]$

(E) $\iff x - 1 = \sqrt{3}$ ou $x - 1 = -\sqrt{3}$ et $x \in [0\,;4]$

(E) $\iff x = 1 + \sqrt{3}$ ou $x = 1 - \sqrt{3}$ et $x \in [0\,;4]$

$\notin [0\,;4]$!

(E) $\iff x = 1 + \sqrt{3}$

$\boxed{\mathcal{S} = \{1 + \sqrt{3}\}}$

V) 1) (a) Calculer A, B et C

$A = 1 \times 3 + 1 = 4 = \boxed{2^2}$ $B = 2 \times 4 + 1 = 9 = \boxed{3^2}$ $C = 10 \times 12 + 1 = 121 = \boxed{11^2}$

(b) Que remarque-t-on ?

A, B et C sont 3 carrés parfaits

2) (a) produit $= (n-1)(n+1)$

(b) mystère $(4) = \sqrt{(4-1)(4+1)+1} = \sqrt{16} = 4$

mystère $(5) = \sqrt{(5-1)(5+1)+1} = \sqrt{25} = 5$

mystère $(15) = \sqrt{(15-1)(15+1)+1} = \sqrt{225} = 15$

(c) D'après (b), on peut conjecturer que pour tout n de $\mathbb{N}$,

$\boxed{\text{mystère}(n) = n}$

3) Démonstration

Pour tout n de $\mathbb{N}$,

mystère $(n) = \sqrt{(n-1)(n+1)+1} = \sqrt{n^2 - 1 + 1} = \sqrt{n^2}$

or $n \geqslant 0$ donc $\boxed{\text{mystère}(n) = n}$

VI) Calcul de $\vec{EF} + \vec{GH} + \vec{KD}$

Par (H) ABED est un carré donc $\vec{EB} = -\vec{AD}$

CBFG ——————— $\vec{BF} = -\vec{GC}$

ACHK ——————— $\vec{CH} = -\vec{KA}$

donc $\vec{EF} + \vec{GH} + \vec{KD} = \cancel{\vec{EB}} + \cancel{\vec{BF}} + \cancel{\vec{FC}} + \cancel{\vec{CH}} + \cancel{\vec{KA}} + \cancel{\vec{AD}} = \vec{0}$

2^k DS du 14 IX 09 1h Corrigé succinct

I) 1) 2) Simplifier A et B

$$\boxed{A = \frac{5}{\sqrt7-\sqrt2} - \sqrt7 = \frac{5(\sqrt7+\sqrt2)}{(\sqrt7-\sqrt2)(\sqrt7+\sqrt2)} - \sqrt7 = \frac{5\sqrt7+5\sqrt2}{7-2} - \sqrt7 = \frac{5\sqrt7+5\sqrt2}{5} - \sqrt7 = \sqrt7+\sqrt2-\sqrt7 = \sqrt2}$$

$$\boxed{B = \left(\sqrt{\frac53} - \sqrt{\frac35}\right)^2 = \frac53 - 2\sqrt{\frac53}\sqrt{\frac35} + \frac35 = \frac53 - 2 + \frac35 = \frac{25}{15} - \frac{30}{15} + \frac{9}{15} = \frac{4}{15}}$$

3) EFG est-il rectangle ?

$EF = \frac{5}{\sqrt7-\sqrt2} - \sqrt7 = A = \sqrt2$ donc $EF^2 = 2$

$FG = \sqrt{\frac53} - \sqrt{\frac35}$ donc $FG^2 = B = \frac{4}{15}$

$EG = \sqrt{\frac{26}{15}}$ donc $EG^2 = \frac{26}{15}$

or on remarque que $EG^2 + FG^2 = \frac{26}{15} + \frac{4}{15} = \frac{30}{15} = 2 = EF^2$

donc d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle $\boxed{\text{EFG est rectangle en G}}$

II) Simplifier

$$G = \frac{3\sqrt{18} - 2\sqrt2 + \sqrt{50}}{\sqrt{32} + 5\sqrt2 - 3\sqrt8} = \frac{9\sqrt2 - 2\sqrt2 + 5\sqrt2}{4\sqrt2 + 5\sqrt2 - 6\sqrt2} = \frac{12\cancel{\sqrt2}}{3\cancel{\sqrt2}} = \frac{4\times\cancel{3}}{\cancel{3}} = \boxed{4}$$

$$H = \sqrt{0{,}1^4} \times \sqrt{500} = \sqrt{(10^{-1})^4} \times \sqrt{5\times10^2} = \sqrt{10^{-4}\times5\times10^2} = \sqrt{5\times10^{-2}} = \boxed{\frac{\sqrt5}{10}}$$

$$I = \sqrt{10^2} - \sqrt{(-8)^2} = 10 - 8 = \boxed{2}$$

$$J = \sqrt{(1+\sqrt5)^2} - 2\sqrt{(2-\sqrt5)^2} = 1+\sqrt5 - 2(\sqrt5-2) = 1+\sqrt5-2\sqrt5+4 = \boxed{5-\sqrt5}$$

$$K = \frac{\frac{4}{27} \div \frac23}{\frac{32}{7} \div \frac{16}{5}} = \frac{\frac{4}{27}\times\frac32}{\frac{32}{7}\times\frac{5}{16}} = \frac{\frac{2\times\cancel{2}\times\cancel{3}}{9\times\cancel{3}\times\cancel{2}}}{\frac{\cancel{16}\times2\times5}{7\times\cancel{16}}} = \frac29 \times \frac{7}{2\times5} = \boxed{\frac{7}{45}}$$

$$L = \frac{15\times(-6)^{-4}}{10^{-2}\times25\times(-12^{-2})} = -\frac{15\times6^{-4}}{10^{-2}\times25\times12^{-2}} = -\frac{3\times5\times3^{-4}\times2^{-4}}{2^{-2}\times\cancel{5}\times\cancel{5}^{2}\times2^{-4}\times3^{-2}} = -2^2\times3^{-1}\times5 = \boxed{-\frac{20}{3}}$$

III) Écrire sans forme de fraction

$M = 8{,}515151\ldots$ donc $100M = 851{,}515151\ldots$ donc $100M - M = 851 - 8 = 843$ donc $99M = 843$

donc $M = \frac{843}{99} = \frac{3\times281}{3\times33} = \boxed{\frac{281}{33}}$

IV Factoriser

$N = 3(1-x)^2 - 27x^2$

$N = 3[(1-x)^2 - (3x)^2]$

$N = 3(1-x-3x)(1-x+3x)$

$\boxed{N = 3(1-4x)(1+2x)}$

$O = 0{,}25x^2 - x + 1$

$\boxed{O = (0{,}5x-1)^2}$

$P = x^2(x-1) + 3x^2 - 3x + (x-1)(3x+5)$

$P = x^2(x-1) + 3x(x-1) + (x-1)(3x+5)$

$P = (x-1)(x^2+3x+3x+5)$

$P = (x-1)(x^2+6x+5)$

$P = (x-1)((x+3)^2 - 9 + 5)$

$P = (x-1)((x+3)^2 - 2^2)$

$P = (x-1)(x+3-2)(x+3+2)$

$\boxed{P = (x-1)(x+1)(x+5)}$

V Déterminer $x+y$

Par (H) ABCD est un carré donc le triangle ADC est isocèle rectangle en D donc d'après Pythagore, on a :

$AC^2 = AD^2 + DC^2 = 2AD^2$ donc $AC = \sqrt2\,AD$ donc $AC = \sqrt2$

De plus le carré de diagonale [OA] a pour côté x donc en appliquant le raisonnement ci-dessus, on a : $OA = \sqrt2\,x$

De même dans le carré de diagonale [O'C] et de côté y on a : $O'C = \sqrt2\,y$

Or A, O, O' et C sont alignés dans cet ordre donc :

$AC = AO + OO' + O'C$

$\sqrt2 = \sqrt2 x + (x+y) + \sqrt2 y$

$\sqrt2 = \sqrt2(x+y) + (x+y)$

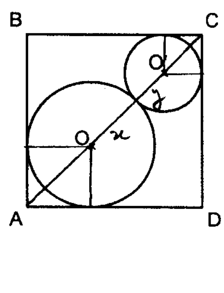
$\sqrt2 = (1+\sqrt2)(x+y)$

donc $x+y = \frac{\sqrt2}{1+\sqrt2}$

$x+y = \frac{\sqrt2(1-\sqrt2)}{(1+\sqrt2)(1-\sqrt2)}$

$x+y = \frac{\sqrt2-2}{1-2}$

$\boxed{x+y = 2-\sqrt2}$



2IK DS du 19|X05 1h Corrigé succinct

I) 1) $\left(\sqrt{4-\sqrt7}+\sqrt{4+\sqrt7}\right)^2 = 4-\cancel{\sqrt7} + 2\sqrt{4-\sqrt7}\times\sqrt{4+\sqrt7} + 4+\cancel{\sqrt7} = 8+2\sqrt{(4-\sqrt7)(4+\sqrt7)}$

$= 8+2\sqrt{16-7} = 8+2\times3 = \boxed{14}$

2) Pour tout $(a;b)$ tel que $a\neq b$ et $a\neq -b$:

$$\frac{a}{a-b}-\frac{b}{a+b}-\frac{a^2+b^2}{(a+b)(a-b)} = \frac{a(a+b)-b(a-b)-a^2-b^2}{(a+b)(a-b)} = \frac{\cancel{a^2}+\cancel{ab}-\cancel{ab}+\cancel{b^2}-\cancel{a^2}-\cancel{b^2}}{(a+b)(a-b)} = \boxed{0}$$

3) $$\frac{(\pi\sqrt3)^7(\pi^2\sqrt2)^5}{\left(\sqrt{\frac{3}{8}}\right)^3} = \frac{\pi^7\times\sqrt3^7\times\pi^{10}\times\sqrt2^5}{\sqrt3^3\times\sqrt8^{-3}} = \frac{\pi^{17}\times\sqrt3^7\times\sqrt2^5}{\sqrt3^3\times(2\sqrt2)^{-3}} = \frac{\pi^{17}\times\sqrt3^7\times\sqrt2^5\times2^3\times\sqrt2^3}{\sqrt3^3}$$

$$= \pi^{17}\times\sqrt3^4\times\sqrt2^8\times2^3 = \pi^{17}\times3^2\times2^4\times2^3 = \boxed{2^7\times3^2\times\pi^{17}}$$

II) 1) $x^2=9$

$\iff x^2-3^2=0$

$\iff (x-3)(x+3)=0$

$\iff x=3$ ou $x=-3$ $(AB=0 \iff A=0$ ou $B=0)$

$\boxed{S=\{-3;3\}}$

2) $(1-x)^2+3=0$

$\iff (1-x)^2=-3$

or un carré ne peut être négatif !

$\boxed{S=\emptyset}$

3) $\dfrac{9x^2-25}{(x+2)(3x+5)}=0$ conditions : $\begin{cases}x+2\neq0\\3x+5\neq0\end{cases} \iff \boxed{\begin{cases}x\neq-2\\x\neq-\frac{5}{3}\end{cases}}$

$\iff 9x^2-25=0$

$\iff (3x-5)(3x+5)=0$

$\iff x=\frac{5}{3}$ ou $x=-\frac{5}{3}$ $(AB=0 \iff A=0$ ou $B=0)$

$\boxed{S=\left\{\frac{5}{3}\right\}}$

4) $\dfrac{x}{(x+2)^2}=\dfrac{2x+3}{x(x+2)}$ condition : $\begin{cases}x+2\neq0\\x\neq0\end{cases} \iff \boxed{\begin{cases}x\neq-2\\x\neq0\end{cases}}$

$\iff \dfrac{x}{x+2}=\dfrac{2x+3}{x}$

$\iff x^2=(2x+3)(x+2)$

$\iff x^2+7x+6=0$

$\iff \left(x+\frac{7}{2}\right)^2-\frac{49}{4}+\frac{24}{4}=0$

$\iff \left(x+\frac{7}{2}\right)^2-\left(\frac{5}{2}\right)^2=0$

$\iff (x+1)(x+6)=0$

$\iff x=-1$ ou $x=-6$ $(AB=0 \iff A=0$ ou $B=0)$

$\boxed{S=\{-6;-1\}}$

III) 1) $\dfrac{1}{1+x}=x$ condition : $\boxed{x\neq-1}$

$\iff 1=x(1+x)$

$\iff x^2+x-1=0$

$\iff \left(x+\frac12\right)^2-\frac14-1=0$

$\iff \left(x+\frac12\right)^2-\left(\frac{\sqrt5}{2}\right)^2=0$

$\iff \left(x+\frac12-\frac{\sqrt5}{2}\right)\left(x+\frac12+\frac{\sqrt5}{2}\right)=0$

$\iff x=\dfrac{-1-\sqrt5}{2}$ ou $x=\dfrac{-1+\sqrt5}{2}$

$\boxed{S=\left\{\frac{-1-\sqrt5}{2};\frac{-1+\sqrt5}{2}\right\}}$

2) D'après 1), $\dfrac{\sqrt5-1}{2}$ est solution de $\dfrac{1}{1+x}=x$

donc $\dfrac{1}{1+\frac{\sqrt5-1}{2}}=\dfrac{\sqrt5-1}{2}$

En remplaçant donc $\dfrac{1}{1+\frac{\sqrt5-1}{2}}$ par $\dfrac{\sqrt5-1}{2}$ six fois de suite dans A, on trouve : $A=1+\dfrac{\sqrt5-1}{2}$

$\boxed{A=\frac{1+\sqrt5}{2}}$

IV) Soit n un entier. Si l'entier p divise n alors $\frac{n}{p}$ est entier et divise n lui aussi.
Les diviseurs d'un entier vont donc par 2, le produit de chaque paire étant égal à l'entier.
Exemple avec 6 dont les diviseurs sont : 1 2 3 6
Il y a une exception cependant : si l'entier n est un carré alors le diviseur du milieu est compté avec lui même et le nombre total de diviseurs est impair. Exemple avec 9 : 1 3 9