TRIGONOMÉTRIE

La trigonométrie dans le triangle rectangle est bien utile pour calculer des angles et des longueurs, mais hélas elle se limite aux angles aigus !
Nous allons donc choisir cette année une nouvelle unité d'angle et une nouvelle définition des sinus et cosinus qui peuvent paraître compliquées mais qui ouvriront à terme un nombre incroyable de possibilités !

I) LE CERCLE TRIGONOMÉTRIQUE

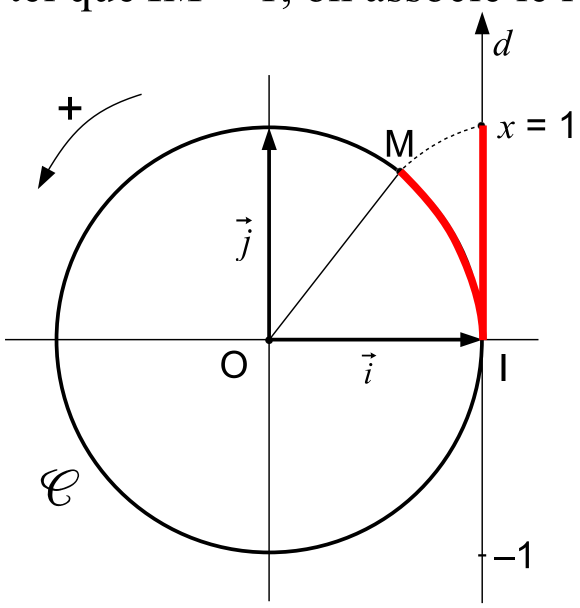
1) Définition

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$, on appelle cercle trigonométrique le cercle $\mathscr{C}$ de centre O et de rayon 1.
On définit alors un sens positif de parcours (sens contraire des aiguilles d'une montre), appelé « sens direct » ou « sens trigonométrique ».

2) Enroulement de la droite des réels

Soit M un point quelconque de $\mathscr{C}$. Pour préciser sa position, on enroule une droite graduée d d'origine $I(1 ; 0)$ autour de $\mathscr{C}$ et on note quelle graduation x de d va correspondre au point M.

Ex : Au point M de $\mathscr{C}$ tel que $\widehat{IM} = 1$, on associe le réel $x = 1$.

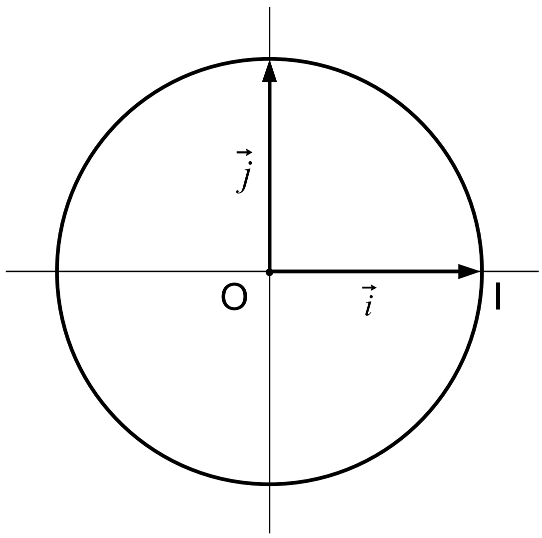


Voir la figure Géogebra

3) Valeurs remarquables de *x*

Le périmètre de $\mathscr{C}$ étant 2π, les valeurs de x qui correspondent à des points « simples à placer » seront des fractions de π.

x	0	π	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{-\pi}{2}$	$\frac{-\pi}{4}$
$\widehat{IOM}$	0°	180°	90°	45°	60°	120°	30°	90°	45°



p114 : 43

4) Mesure d'un angle en radian

A chaque réel x correspond un point M et donc un angle $\widehat{IOM}$.

La valeur de x peut donc permettre de « mesurer » l'angle $\widehat{IOM}$.

On appelle x : « mesure en radian » de l'angle $\widehat{IOM}$.

Le tableau précédent donne la correspondance radian-degrés des angles usuels.

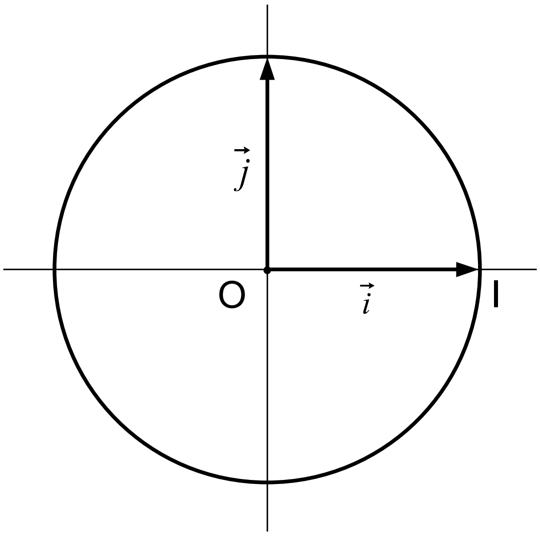
Il y a donc une correspondance entre :
- La position d'une graduation x sur la droite des réels.
- La position du point M associé à x sur le cercle trigonométrique.
- La longueur de l'arc $\overset{\frown}{IM}$.
- La mesure en radians de l'angle $\widehat{IOM}$.

Le radian sera désormais l'unité de mesure d'angle par défaut car il permet de simplifier de très nombreux calculs et formules !!

Avec la calculatrice, savoir passer du mode degré au mode radian

5) Et si la droite des réels fait plusieurs tours ?

Plaçons ci-dessous les points associés aux réels $\frac{-\pi}{2}$; $\frac{3\pi}{2}$; $\frac{7\pi}{2}$



On constate que ces trois réels sont associés au même point !

En effet, il y a un écart de 2π (un tour complet) entre $\frac{-\pi}{2}$ et $\frac{3\pi}{2}$ ainsi qu'entre $\frac{3\pi}{2}$ et $\frac{7\pi}{2}$.

Bilan :

- A un réel donné correspond un seul point sur le cercle trigonométrique.
- A un point du cercle correspondent une infinité de réels :

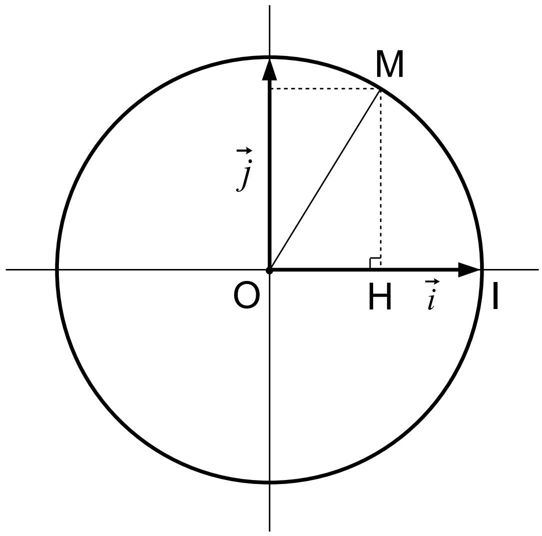
$$x, x+2\pi, x-2\pi, \dots, x+1000\pi, \dots$$

p114 : 44
p115 : 49

II) SINUS ET COSINUS D'UN RÉEL QUELCONQUE

1) Définition

Soit $\mathscr{C}$ le cercle trigonométrique muni du repère $(O;\vec{i},\vec{j})$.
Soit x un réel quelconque, et M le point de $\mathscr{C}$ associé à x.
On appelle alors « $\cos x$ » et « $\sin x$ » les coordonnées de M.



2) Lien avec la trigonométrie du collège

On a choisi ci-dessus, $x \in [0 ; \pi/2]$ de façon à ce que $\widehat{IOM}$ soit un angle aigu.
x étant la mesure en radian de $\widehat{IOM}$, x est aussi celle de $\widehat{HOM}$.
On a alors dans le triangle HOM rectangle en H :

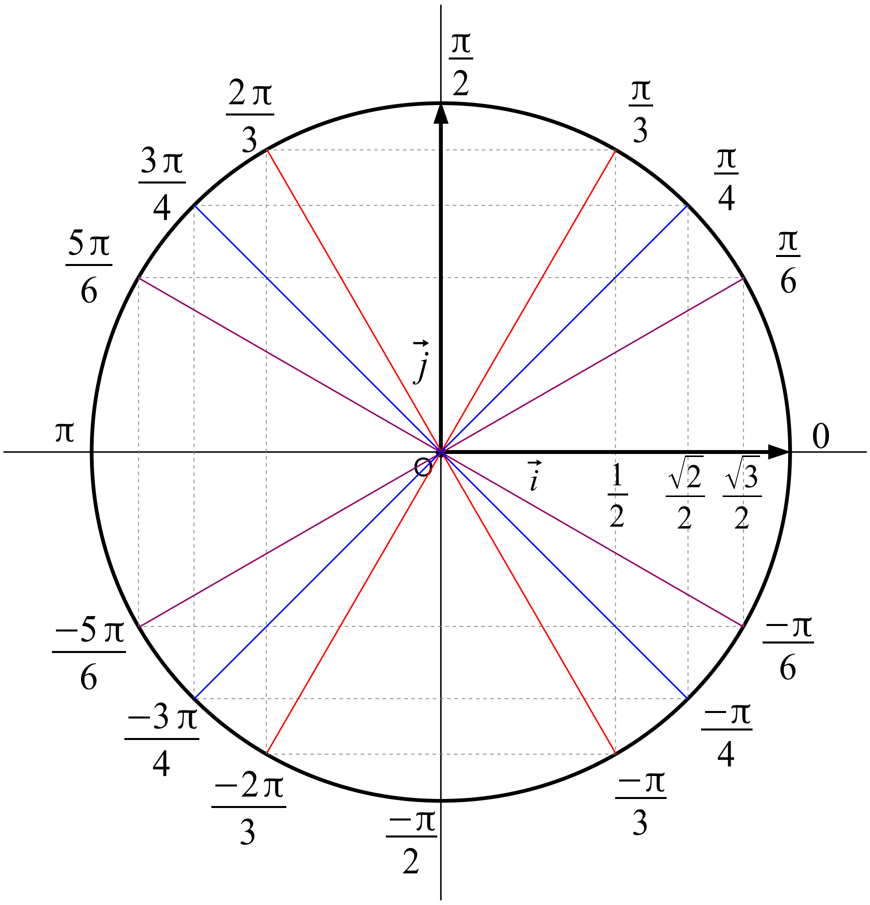
- $\cos x = \cos \widehat{HOM} = \dfrac{OH}{OM} = \dfrac{OH}{1} = OH = x_M$
- $\sin x = \sin \widehat{HOM} = \dfrac{HM}{OM} = \dfrac{HM}{1} = HM = y_M$

3) Propriétés

D'après la définition ci-dessus, on a pour tout x de $\mathbb{R}$:

- $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$ et $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$
- $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$
- $\cos(-x) = \cos x$ et $\sin(-x) = -\sin x$
- $\cos(x \pm 2\pi) = \cos x$ et $\sin(x \pm 2\pi) = \sin x$

4) Valeurs remarquables des sinus et cosinus



Déterminer sin et cos :
p114 : 45
p115 : 47, 50, 51, 52, 53

Utilisation des propriétés :
p116 : 60, 63, 64, 65, 66, 67

III) DANS LES EXERCICES

1) Valeur exacte de cos *x* et de sin *x*

Méthode : Ajouter ou retrancher plusieurs fois 2 π de façon à obtenir une valeur de x dont on puisse déterminer le sinus ou le cosinus à l'aide du cercle trigonométrique.

Ex : Déterminer : $\cos\frac{80\pi}{3}$ et $\sin\frac{80\pi}{3}$

Rédaction :

On remarque que : $\frac{80\pi}{3}=\frac{13\times 6\pi}{3}+\frac{2\pi}{3}=13\times 2\pi+\frac{2\pi}{3}$

donc $\cos\frac{80\pi}{3}=\cos\frac{2\pi}{3}=\frac{-1}{2}$

et $\sin\frac{80\pi}{3}=\sin\frac{2\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

p115 : 48

2) Valeur exacte de sin *x* connaissant cos *x* et vice versa

Méthode : Utiliser la propriété $\cos^2 x+\sin^2 x=1$

Ex : Déterminer : sin *x* sachant que $\cos x=\frac{5}{9}$ et $x \in [0 ; \pi]$

Rédaction :

Pour tout *x* de $\mathbb{R}$, on a $\cos^2 x+\sin^2 x=1$

or $\cos x=\frac{5}{9}$ donc $\frac{25}{81}+\sin^2 x=1$

donc $\sin^2 x=1-\frac{25}{81}=\frac{56}{81}$

donc $\sin x=\frac{\sqrt{56}}{9}$ ou $\sin x=-\frac{\sqrt{56}}{9}$

De plus $x \in [0 ; \pi]$, donc $\sin x \geqslant 0$

Bilan : $\sin x=\frac{\sqrt{56}}{9}=\frac{2\sqrt{14}}{9}$

p115 : 46, 54

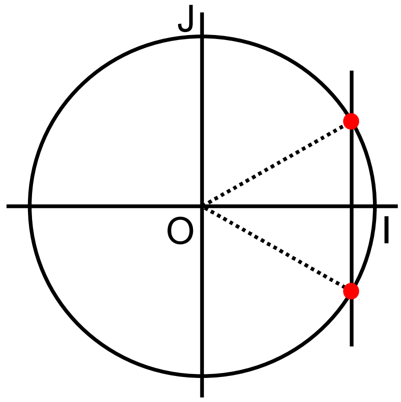
3) Équation – inéquation du type cos *x* = *a* dans un intervalle

Ex 1 : A l'aide du cercle trigonométrique, résoudre :

(E) : $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ avec $x \in [0 \, ; 2\pi[$

Rédaction :

D'après le cercle trigonométrique ci-contre, on a :



(E) $\Leftrightarrow$ $x = \frac{\pi}{6}$ ou $x = \frac{11\pi}{6}$

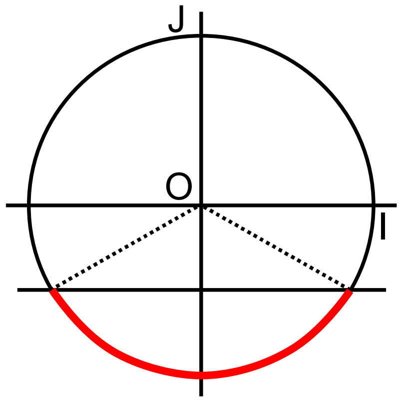
S = $\left\{\frac{\pi}{6} ; \frac{11\pi}{6}\right\}$

Ex 2 : A l'aide du cercle trigonométrique, résoudre :

(I) : $\sin x < -\frac{1}{2}$ avec $x \in]-\pi \, ; \pi]$

Rédaction :

D'après le cercle trigonométrique ci-contre, on a :



(I) $\Leftrightarrow$ $-\frac{5\pi}{6} < x < -\frac{\pi}{6}$

S = $\left]-\frac{5\pi}{6} ; -\frac{\pi}{6}\right[$

p115 : 56, 57
p116 : 61, 62

Algo :
p116 : 70