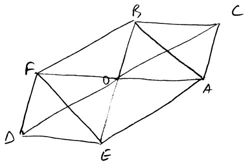
2G DS du 17 XI 15 2h corrigé succinct

I)

| (P) | (Q) | Relation |
|---|---|---|
| $(x+5)(x+1)=(3x-2)(x+1)$ | $x+5=3x-2$ | $(Q) \Rightarrow (P)$ |
| $(x+3)(x^2+1)=(x^2+1)(4x-1)$ | $x+3=4x-1$ | $(P) \Leftrightarrow (Q)$ |
| $(2x-3)^2=(3x-1)^2$ | $2x-3=3x-1$ | $(Q) \Rightarrow (P)$ |
| $\dfrac{4x-3}{x^2-4}=0$ | $x=\dfrac{4}{3}$ | $(P) \Leftrightarrow (Q)$ |
| Pour tout $x$ de $\mathbb{R}$, $f(x)=0$ | Pour tout $x$ de $[-3\,;+\infty[$, $f(x)=0$ | $(P) \Rightarrow (Q)$ |
| $x \in \mathrm{I} \cap \mathrm{J}$ | $x \in \mathrm{I} \cup \mathrm{J}$ | $(P) \Rightarrow (Q)$ |
| $(x-4)^2 \geq 0$ | $x \in ]-\infty\,;4]$ | $(Q) \Rightarrow (P)$ |
| $1{,}19 \leq x \leq 1{,}23$ | $1{,}1 \leq x \leq 1{,}3$ | $(P) \Rightarrow (Q)$ |

II)




1) Montrer que O est le milieu de [CD]

Par (H) $\vec{OA}+\vec{OB}=\vec{OC}$ et $\vec{OA}+\vec{OB}+\vec{OD}=\vec{0}$

donc $\vec{OC}+\vec{OD}=\vec{0}$

donc $\boxed{\text{O est le milieu de } [CD]}$

2) Montrer que ABFE est un parallélogramme

$$\begin{aligned}\vec{EF} &= \vec{EO}+\vec{OF}\\ &= \vec{AO}+\cancel{\vec{DO}}+\vec{OB}+\cancel{\vec{OD}}\\ &= \vec{AB}\end{aligned}$$

(par (H) $\vec{OE}=\vec{OA}+\vec{OD}$ et $\vec{OF}=\vec{OB}+\vec{OD}$)

donc $\boxed{\text{ABFE est un parallélogramme}}$

III) Résoudre dans $\mathbb{R}$ :

$(E_1)$ : $4x^2+4x+1+(2x+1)(x-1)=4x+2$

$(E_1) \Leftrightarrow (2x+1)^2+(2x+1)(x-1)-2(2x+1)=0$

$(E_1) \Leftrightarrow (2x+1)(2x+1+x-1-2)=0$

$(E_1) \Leftrightarrow (2x+1)(3x-2)=0$

$(E_1) \Leftrightarrow x=-\frac{1}{2}$ ou $x=\frac{2}{3}$

$\boxed{\mathcal{S}=\left\{-\frac{1}{2}\,;\frac{2}{3}\right\}}$

$(E_2)$ : $\dfrac{x+1}{x+2}=x+1$ condition : $x \neq -2$

$(E_2) \Leftrightarrow \begin{cases} x+1=(x+1)(x+2)\\ x\neq -2\end{cases}$

$(E_2) \Leftrightarrow \begin{cases} x+1-(x+1)(x+2)=0\\ x\neq -2\end{cases}$

$(E_2) \Leftrightarrow \begin{cases} (x+1)(1-x-2)=0\\ x\neq -2\end{cases}$

$(E_2) \Leftrightarrow \begin{cases} (x+1)(-x-1)=0\\ x\neq -2\end{cases}$

$(E_2) \Leftrightarrow \begin{cases} -(x+1)^2=0\\ x\neq -2\end{cases}$

$(E_2) \Leftrightarrow x=-1$

$\boxed{\mathcal{S}=\{-1\}}$

$(E_3)$ : $\dfrac{x^2-6x+9}{x^2-9}=0$ condition : $x^2-9\neq 0 \Leftrightarrow x\neq -3$ et $x\neq 3$

$(E_3) \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{(x-3)^2}{(x-3)(x+3)}=0\\ x\neq -3 \text{ et } x\neq 3\end{cases}$

$(E_3) \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x-3}{x+3}=0\\ x\neq -3 \text{ et } x\neq 3\end{cases}$

$(E_3) \Leftrightarrow \begin{cases} x=3\\ x\neq -3 \text{ et } x\neq 3\end{cases}$

$\boxed{\mathcal{S}=\emptyset}$

$(E_5)$ : $\dfrac{x-2(x-1)^2}{4-x^2}=4x-2$ condition : $4-x^2\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 2$ et $x\neq -2$

$(E_5) \Leftrightarrow \dfrac{(x-2)(1-2x)}{(2-x)(2+x)}=2(2x-1)$ et $x\neq 2$ et $x\neq -2$

$(E_5) \Leftrightarrow \dfrac{2x-1}{x+2}=2(2x-1)$ et $x\neq 2$ et $x\neq -2$

$(E_5) \Leftrightarrow 2x-1=2(2x-1)(x+2)$ et $x\neq 2$ et $x\neq -2$

$(E_5) \Leftrightarrow (2x-1)-2(2x-1)(x+2)=0$ et $x\neq 2$ et $x\neq -2$

$(E_5) \Leftrightarrow (2x-1)(1-2(x+2))=0$ et $x\neq 2$ et $x\neq -2$

$(E_5) \Leftrightarrow (2x-1)(-2x-3)=0$ et $x\neq 2$ et $x\neq -2$

$(E_5) \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$ ou $x=-\frac{3}{2}$

$\boxed{\mathcal{S}=\left\{-\frac{3}{2}\,;\frac{1}{2}\right\}}$

IV) 1) Démontrer une égalité

Pour tout $x$ de $\mathbb{R}$, on a

d'une part : $x-2(x-1)^2 = x-2(x^2-2x+1) = x-2x^2+4x-2 = -2x^2+5x-2$

et d'autre part : $(x-2)(1-2x) = x-2x^2-2+4x = -2x^2+5x-2$

Donc on a bien $\boxed{x-2(x-1)^2=(x-2)(1-2x)}$

2) Résoudre dans $\mathbb{R}$

$(E_4)$ : $x-2(x-1)^2=(3-6x)(1-2x)$

$(E_4) \Leftrightarrow (x-2)(1-2x)=3(1-2x)^2$

$(E_4) \Leftrightarrow (x-2)(1-2x)-3(1-2x)^2=0$

$(E_4) \Leftrightarrow (1-2x)(x-2-3(1-2x))=0$

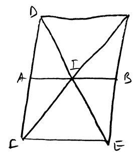
$(E_4) \Leftrightarrow (1-2x)(x-2-3+6x)=0$

$(E_4) \Leftrightarrow (1-2x)(7x-5)=0$

$(E_4) \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$ ou $x=\frac{5}{7}$

$\boxed{\mathcal{S}=\left\{\frac{1}{2}\,;\frac{5}{7}\right\}}$

V)




1) Coordonnées des points

A est l'origine du repère donc $\boxed{A(0\,;0)}$

$\vec{AB}=1\times\vec{AB}+0\times\vec{AD}$ donc $\boxed{B(1\,;0)}$

Par (H) ABCD est un parallélogramme

donc $\vec{AC}=\vec{AB}+\vec{AD}$ donc $\boxed{C(1\,;1)}$

$\vec{AD}=0\times\vec{AB}+1\times\vec{AD}$ donc $\boxed{D(0\,;1)}$

Par (H) E est le symétrique de C par rapport à B

donc B est le milieu de [EC]

donc $\begin{cases} x_B=\dfrac{x_E+x_C}{2}\\ y_B=\dfrac{y_E+y_C}{2}\end{cases}$ donc $\begin{cases} 1=\dfrac{x_E+1}{2}\\ 0=\dfrac{y_E+1}{2}\end{cases}$ donc $\begin{cases} x_E=1\\ y_E=-1\end{cases}$

$\boxed{E(1\,;-1)}$

2) Nature de DCEF

D'après 1) on a : $D(0\,;1)$ et $C(1\,;1)$ donc $\vec{DC}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$

et $F(0\,;-1)$ et $E(1\,;-1)$ donc $\vec{FE}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$

donc $\vec{DC}=\vec{FE}$

donc $\boxed{\text{DCEF est un parallélogramme}}$

3) Montrer que F est symétrique de D par rapport à A

Par (H) $F(0\,;-1)$ donc $\vec{AF}\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}$ donc $\vec{AF}=-\vec{AD}$

donc $\boxed{\text{F est le symétrique de D par rapport à A}}$

4) Coordonnées de I

D'après 2) DCEF est un parallélogramme donc ses diagonales [DE] et [CF] se coupent en leur milieu donc I leur intersection est le milieu de [DE]

donc $\begin{cases} x_I=\dfrac{x_D+x_E}{2}=\dfrac{0+1}{2}=\dfrac{1}{2}\\ y_I=\dfrac{y_D+y_E}{2}=\dfrac{1-1}{2}=0\end{cases}$ donc $\boxed{I\left(\frac{1}{2}\,;0\right)}$

VI 1) Mise en equation

On appelle $x$ le nombre total d'employés. $x\in\mathbb{N}$ et $x>4$

Si on exclut les responsables de secteurs la part payée à chacun sera $\dfrac{9600}{x-4}$

Si on ne les exclut pas, cette part sera $\dfrac{9600}{x}$

L'augmentation de 80 € se traduit alors par :

$(E)$ : $\dfrac{9600}{x-4}=\dfrac{9600}{x}+80$ avec $x\in\mathbb{N}$ et $x>4$

Simplifions cette equation :

$(E) \Leftrightarrow \dfrac{120}{x-4}=\dfrac{120}{x}+1$ et $x\in\mathbb{N}$ et $x>4$

$(E) \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{120x}{x(x-4)}=\dfrac{120(x-4)}{x(x-4)}+\dfrac{x(x-4)}{x(x-4)}\\ x\in\mathbb{N} \text{ et } x>4\end{cases}$

$(E) \Leftrightarrow \begin{cases} 120x=120(x-4)+x(x-4)\\ x\in\mathbb{N} \text{ et } x>4\end{cases}$

$(E) \Leftrightarrow \begin{cases} \cancel{120x}=\cancel{120x}-480+x^2-4x\\ x\in\mathbb{N} \text{ et } x>4\end{cases}$

$(E) \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-4x-480=0\\ x\in\mathbb{N} \text{ et } x>4\end{cases}$

Le problème revient donc bien à résoudre $\boxed{x^2-4x-480=0}$ dans le cas où $x\in\mathbb{N}$ et $x>4$

2) Factorisation de $x^2-4x-480$

Pour tout $x$ de $\mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}x^2-4x-480 &= (x-2)^2-4-480\\ &= (x-2)^2-484\\ &= (x-2)^2-22^2\\ &= (x-2-22)(x-2+22)\\ &= (x-24)(x+20)\end{aligned}$$

Bilan : $\boxed{x^2-4x-480=(x-24)(x+20)}$

3) Conclure

Résolvons l'équation du 1) :

$(E) \Leftrightarrow \begin{cases} (x-24)(x+20)=0\\ x\in\mathbb{N} \text{ et } x>4\end{cases}$

$(E) \Leftrightarrow \begin{cases} x=24 \text{ ou } x=-20\\ x\in\mathbb{N} \text{ et } x>4\end{cases}$

$(E) \Leftrightarrow x=24$

Il y a donc $\boxed{\text{24 employés dans l'entreprise}}$