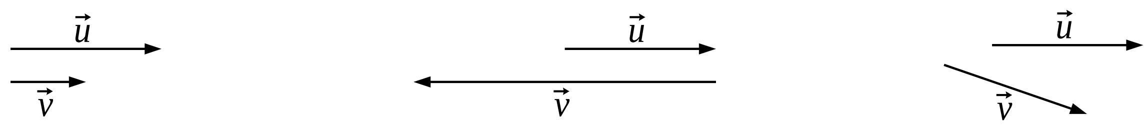
VECTEURS 3 – COLINÉARITÉ

I) COLINÉARITÉ DE DEUX VECTEURS

1) Intuitivement

Exprimer $\vec{u}$ en fonction de $\vec{v}$ dans les cas suivants :



$\vec{u} = 2\ \vec{v}$ $\qquad$ $\vec{u} = -\dfrac{1}{2}\ \vec{v}$ $\qquad$ $\vec{u} = ?\ \vec{v}$

Ces exemples permettent de sentir intuitivement que :
- si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont la même direction, il existe un réel k tel que $\vec{u} = k\vec{v}$.
- si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ n'ont pas la même direction, un tel réel k n'existe pas.

2) Définition

On dit que $\vec{u}$ est colinéaire à $\vec{v}$ lorsqu'il existe un réel k tel que $\vec{u} = k\vec{v}$.
- $\vec{u}$ a alors la même direction que $\vec{v}$.
- Les coordonnées de $\vec{u}$ sont proportionnelles à celles de $\vec{v}$.

Remarques :
- Le vecteur nul est colinéaire à tout vecteur $\vec{v}$:
  car quelque soit $\vec{v}$, il suffit de choisir $k = 0$: $\vec{0} = 0 \times \vec{v}$
  En revanche, aucun vecteur non nul n'est colinéaire au vecteur nul :
  $\vec{u} = ? \times \vec{0}$
- Dans le cas où $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non nuls et où $\vec{u}$ est colinéaire à $\vec{v}$:
  Le réel k tel que $\vec{u} = k\vec{v}$ est alors non-nul,
  on peut donc écrire $\vec{v} = \dfrac{1}{k}\vec{u}$ et $\vec{v}$ est donc aussi colinéaire à $\vec{u}$.
  On dit alors que « $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires » (l'un à l'autre)

p318 : 63, 64, 67
p319 : 71, 72, 73, 74, 78, 79, 80
p320 : 81, 82, 83, 84, 85q2
p321 : 88, 92
p323 : 99, 100

II) DANS LES EXERCICES

1) Application

A, B, C et D étant distincts, on a :

- $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires $\Leftrightarrow$ (AB) // (CD)
- $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires $\Leftrightarrow$ A, B et C sont alignés

2) Exemple

Dans un repère $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$, on considère les points :
A(1 ; 2), B(4 ; 1), C(6 ; –1) et D(0 ; 1).

1) Montrer que (AB) et (CD) sont parallèles.
2) Déterminer le ou les réels *m* tels que A, B et E(*m*+1 ; 2*m*) soient alignés.

Rédaction :

1) <u>Montrer que : (AB) // (CD).</u>

Par hypothèse, A(1 ; 2) et B(4 ; 1) donc $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$

Par hypothèse, C(6 ; –1) et D(0 ; 1) donc $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix} -6 \\ 2 \end{pmatrix}$

On remarque que $\overrightarrow{CD} = -2\overrightarrow{AB}$
donc $\overrightarrow{CD}$ est colinéaire à $\overrightarrow{AB}$
donc $\boxed{\text{(AB) // (CD)}}$.

2) <u>Déterminer *m* tel que A, B et E soient alignés.</u>

Par hypothèse, A(1 ; 2) et E(*m*+1 ; 2*m*) donc $\overrightarrow{AE}\begin{pmatrix} m \\ 2m-2 \end{pmatrix}$

A, B et E alignés $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{AE}\begin{pmatrix} m \\ 2m-2 \end{pmatrix}$ est colinéaire à $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$\Leftrightarrow \frac{m}{3} = \frac{2m-2}{-1}$$

$$\Leftrightarrow -m = 6m - 6$$

$$\Leftrightarrow \boxed{m = \frac{6}{7}}$$